

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά Γ' Λυκείου (κόντρα)**

Εκφωνήσεις - Λύσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida>)

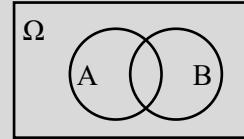
Πιθανότητες

2ο Θέμα

27186. Από τις 80 μαθήτριες, που είναι παρούσες σήμερα στο σχολείο, πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών έχουν 60. Από τις 60 μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών, οι 15 έχουν επιπλέον και πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών. Επιλέγουμε τυχαία μία μαθήτρια από τις 80.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μαθήτρια που επιλέξαμε να έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών.

β) Στο διπλανό διάγραμμα Venn, το Ω περιέχει τις 80 μαθήτριες, το A περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών και το B περιέχει τις μαθήτριες που έχουν πτυχίο καλής γνώσης γαλλικών.



i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το διάγραμμα Venn. Στη συνέχεια να χρωματίσετε με το στυλό σας το μέρος του διαγράμματος Venn που περιέχει τις μαθήτριες, οι οποίες έχουν και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών.

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

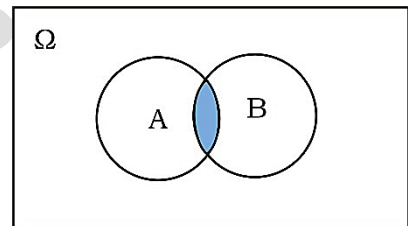
“η μαθήτρια που επιλέξαμε έχει και τα δύο πτυχία: καλής γνώσης αγγλικών και γαλλικών”.

Λύση

α) Έστω A το ενδεχόμενο η μαθήτρια που επιλέχθηκε να έχει πτυχίο καλής γνώσης αγγλικών. Τότε

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}.$$

β) i. Οι μαθήτριες που έχουν και τα δύο πτυχία βρίσκονται και στα δύο ενδεχόμενα.



ii. Επειδή 15 από τις 80 μαθήτριες έχουν και τα δύο πτυχία, η

ζητούμενη πιθανότητα είναι $P = \frac{15}{80} = \frac{3}{16}$.

27187. Από τους 100 μαθητές, που είναι παρόντες σήμερα στο σχολείο, μπλε στυλό έχουν 87.

Από αυτούς, 17 μαθητές έχουν και μπλε και μαύρο στυλό. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή από τους 100.

α) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε στυλό είναι ίση με 0,87.

β) Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και μαύρο στυλό, είναι ίση με 0,17.

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει μπλε και να μην έχει μαύρο στυλό.

Λύση

α) Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει μπλε στυλό, τότε $P(A) = \frac{87}{100} = 0,87$.

β) Επειδή 17 από τους 100 μαθητές έχουν μπλε και μαύρο στυλό, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \frac{17}{100} = 0,17.$$

γ) Επειδή από τους 87 μαθητές που έχουν μπλε στυλό οι 17 έχουν και μαύρο στυλό, οι υπόλοιποι 70

μαθητές δεν έχουν μαύρο στυλό, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{70}{100} = 0,7$.

27230. Σε ένα κουτί υπάρχουν συνολικά 25 σοκολατάκια από τα οποία 12 σοκολατάκια περιέχουν μόνο αμύγδαλο, 8 σοκολατάκια μόνο φουντούκι και 5 σοκολατάκια μόνο κεράσι.

α) Επιλέγουμε τυχαία ένα σοκολατάκι από το κουτί. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το σοκολατάκι αυτό:

- i. να περιέχει αμύγδαλο,
- ii. να μην περιέχει φουντούκι,
- iii. να περιέχει αμύγδαλο ή φουντούκι.

β) Από το κουτί φάγαμε 3 σοκολατάκια με αμύγδαλο και 2 σοκολατάκια με φουντούκι. Αν στη συνέχεια, επιλέξουμε τυχαία ένα σοκολατάκι από το κουτί, να υπολογίσετε την πιθανότητα το σοκολατάκι αυτό να περιέχει κεράσι.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο το σοκολατάκι που επιλέγεται να έχει αμύγδαλο, Φ να έχει φουντούκι και K να έχει κεράσι τότε: $N(\Omega) = 25$, $N(A) = 12$, $N(\Phi) = 8$ και $N(K) = 5$.

α) i. $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25}$.

ii. Είναι $P(\Phi) = \frac{N(\Phi)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25}$, άρα $P(\Phi') = 1 - P(\Phi) = 1 - \frac{8}{25} = \frac{17}{25}$.

iii. Αν δεν περιέχει αμύγδαλο ή φουντούκι, θα περιέχει κεράσι, οπότε $P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

β) Στο κουτί τώρα περιέχονται $N(\Omega) = 25 - 3 - 2 = 20$,

$N(A) = 12 - 3 = 9$, $N(\Phi) = 8 - 2 = 6$ και $N(K) = 5$, οπότε $P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

27312. Ρίχνουμε ένα συνηθισμένο κέρμα τρεις φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα.

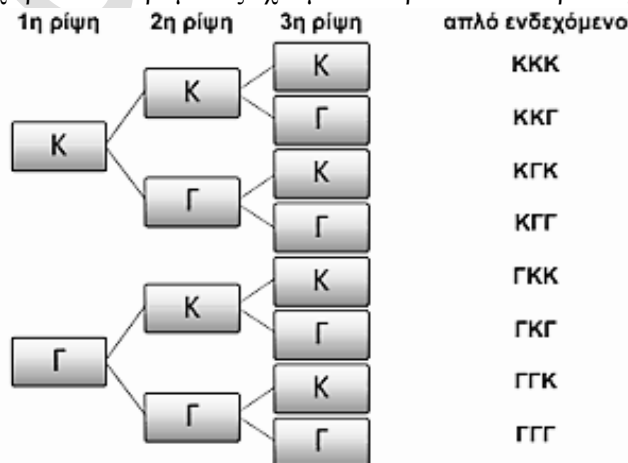
α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε έναν δειγματικό χώρο και το ενδεχόμενο A : «Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι τουλάχιστον δύο φορές κεφαλή».

β) Να γράψετε το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' του A .

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και A' .

Λύση

α) Έστω K το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα της ρίψης του κέρματος να είναι κεφαλή και Γ γράμματα, τότε για τον δειγματικό χώρο του πειράματος έχουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma K K, \Gamma K \Gamma, \Gamma \Gamma K, \Gamma \Gamma \Gamma\}$ με $N(\Omega) = 8$.

Το ενδεχόμενο A: «Το αποτέλεσμα των τριών ρίψεων είναι τουλάχιστον δύο φορές κεφαλή», σημαίνει δύο φορές κεφαλή ή τρεις φορές κεφαλή, οπότε είναι το $A = \{KKK, KKΓ, KΓK, ΓKK\}$.

β) Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο A' του A είναι το $A' = \{KΓΓ, ΓKΓ, ΓΓK, ΓΓΓ\}$.

γ) Είναι $N(A)=4$, άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ και $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

27313. Ο Κώστας και ο Νίκος έχουν ο καθένας ένα συνηθισμένο ζάρι και παίζουν το εξής παιχνίδι: Ρίχνει ο καθένας το δικό του ζάρι και καταγράφουν το αποτέλεσμα. Αν και οι δύο αριθμοί που φέρνουν ο Κώστας και ο Νίκος, είναι μεγαλύτεροι από το 2, τότε κερδίζει ο Κώστας. Διαφορετικά κερδίζει ο Νίκος.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο, όπου για παράδειγμα, το αποτέλεσμα (2, 5) να σημαίνει ότι ο Κώστας έφερε 2 και ο Νίκος 5.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες:

i. να κερδίσει ο Κώστας,

ii. να κερδίσει ο Νίκος.

Λύση

α) Με βάση τον διπλανό πίνακα ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από τα 36 ζευγάρια αριθμών του διπλανού πίνακα.

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

β) i. Αν K είναι το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Κώστας, τότε:

$K = \{(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ με

$N(K) = 16$, οπότε $P(K) = \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

ii) Το ενδεχόμενο να κερδίσει ο Νίκος είναι το συμπληρωματικό του K, οπότε η πιθανότητα να κερδίσει ο

Νίκος είναι $P(K') = 1 - P(K) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

27316. Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από 13 φύλλα: τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, τις φιγούρες βαλέ (J), ντάμα (Q), ρήγα (K) και τον άσο (A).

Η Άννα τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα. Έστω τα ενδεχόμενα A: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός»

και M: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι».

α) Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα $A \cap M$ και $A \cup M$.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A, M και $A \cap M$,

ii. $A \cup M$.

Λύση

α) A: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός» και

M: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι μπαστούνι», οπότε έχουμε

$A \cap M$: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός και μπαστούνι».

$A \cup M$: «το φύλλο που τράβηξε η Άννα, είναι αριθμός ή μπαστούνι».

β) i. Είναι $N(\Omega) = 52$.

Επειδή σε κάθε μία από τις 4 φυλές υπάρχουν 9 αριθμοί, είναι $N(A) = 4 \cdot 9 = 36$, άρα $P(A) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

Επειδή τα μπαστούνια είναι η μία από τις 4 φυλές, είναι $N(M) = 52 : 4 = 13$, οπότε $P(M) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Επειδή μπαστούνια και αριθμοί είναι 9, έχουμε $P(A \cap M) = \frac{9}{52}$.

$$\text{ii. } P(A \cup M) = P(A) + P(M) - P(A \cap M) = \frac{36}{52} + \frac{13}{52} - \frac{9}{52} = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$$

27449. Η Μαρία υιοθέτησε μία γατούλα που ερχόταν συνέχεια στην αυλή του σπιτιού της και την ονόμασε Μελιώ. Μετά από δύο εβδομάδες που την είχε στο σπίτι διαπίστωσε ότι η Μελιώ είναι έγκυος. Την πήγε στον κτηνίατρο μαζί με τη μητέρα της και ο κτηνίατρος τους είπε ότι η Μελιώ θα γεννήσει 4 γατάκια.

α) Να γράψετε χρησιμοποιώντας δένδροδιάγραμμα ένα δειγματικό χώρο για τις δυνατές περιπτώσεις του φύλου των τεσσάρων γατιών με τη σειρά γέννησής τους.

β) Μία φίλη της Μαρίας υποσχέθηκε ότι αφού γεννηθούν και απογαλακτιστούν τα γατάκια από τη μαμά τους, θα υιοθετήσει τα τρία πρώτα γατάκια που θα γεννηθούν, αν είναι ίδιου φύλου. Ένας γείτονας της Μαρίας υποσχέθηκε να υιοθετήσει το 4^ο γατάκι αν είναι θηλυκό, γιατί έχει ήδη μία θηλυκή γατούλα στο σπίτι του.

i. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων του το ενδεχόμενο

A: «Τα τρία πρώτα γατάκια είναι ίδιου φύλου και το τέταρτο γατάκι είναι θηλυκό».

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «Υιοθετούνται και τα τέσσερα γατάκια».

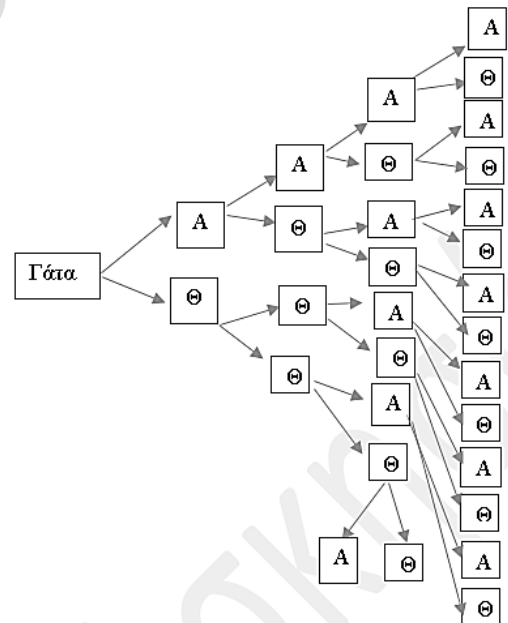
Λύση

α) Με βάση το διπλανό δένδροδιάγραμμα ο δειγματικός χώρος είναι:

$\Omega = \{\Theta\Theta\Theta\Theta, \Theta\Theta\Theta A, \Theta\Theta A\Theta, \Theta\Theta A A, \Theta A\Theta\Theta, \Theta A\Theta A, \Theta A A\Theta, \Theta A A A, A\Theta\Theta\Theta, A\Theta\Theta A, A\Theta A\Theta, A\Theta A A, A A\Theta\Theta, A A\Theta A, A A A\Theta, A A A A\}$

β) i. $A = \{\Theta\Theta\Theta\Theta, A A A A\}$

ii. Έστω A το ενδεχόμενο «Υιοθετούνται και τα τέσσερα γατάκια», τότε $N(A) = 2$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$



27450. Ρωτήθηκαν 100 άτομα για το μέσο ή τα μέσα μεταφοράς που χρησιμοποίησαν στις διακοπές τους το περσινό καλοκαίρι.

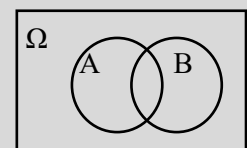
Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το A έχει ως στοιχεία τα άτομα που χρησιμοποίησαν πλοίο και το B εκείνους που χρησιμοποίησαν αεροπλάνο.

Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τα παραπάνω.

α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα το άτομο που επιλέγουμε:

i. Χρησιμοποίησε πλοίο και αεροπλάνο.

ii. Χρησιμοποίησε μόνο αεροπλάνο.



β) Από τα 100 άτομα που ρωτήθηκαν, 75 άτομα απάντησαν ότι ταξίδεψαν με πλοίο, 35 άτομα ότι ταξίδεψαν με αεροπλάνο και 20 άτομα ταξίδεψαν και με τα δύο μεταφορικά μέσα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

E_1 : «Το άτομο που επιλέγουμε χρησιμοποίησε ένα τουλάχιστον από τα δύο μέσα».

E_2 : «Το άτομο που επιλέγουμε να έχει ταξιδέψει μόνο με αεροπλάνο».

Λύση

α) i. $A \cap B$ **ii.** $B - A$

β) $N(A) = 75, N(B) = 35, N(A \cap B) = 20$

$$P(E_1) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{75}{100} + \frac{35}{100} - \frac{20}{100} = \frac{90}{100} = 0,9$$

$$P(E_2) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{35}{100} - \frac{20}{100} = \frac{15}{100} = 0,15$$

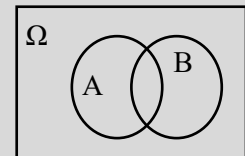
28853. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B δύο ενδεχόμενά του.

α) Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.), να εκφράσετε τα ενδεχόμενα:

i. Πραγματοποιείται το A και το B .

ii. Πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A .

Μπορείτε αν θέλετε να απαντήσετε χρησιμοποιώντας το διπλανό διάγραμμα Venn, σκιάζοντας κάθε φορά το μέρος εκείνο που αναφέρεται στο ζητούμενο ενδεχόμενο.



β) Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Ρίψη ενός νομίσματος δύο φορές» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{KK, KG, GK, GG\}$ και τα ενδεχόμενα A και B που ορίζονται ως εξής:

A : «Στη 1^η ρίψη φέρουμε κεφαλή (K)»,

B : «Φέρουμε διαφορετική ένδειξη και στις 2 ρίψεις».

i. Να γράψετε τα στοιχεία των ενδεχομένων A και B .

ii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων του ερωτήματος α).

Λύση

α) i. $A \cap B$ **ii.** $B - A$

β) i. $A = \{KK, KG\}$ $B = \{KG, GK\}$

ii. $A \cap B = \{KG\}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}, B - A = \{GK\}, P(B - A) = \frac{1}{4}$

29952. Σε ένα σχολείο φοιτούν 120 μαθητές στη Γ Λυκείου και όλοι προετοιμάζονται να διαγωνιστούν στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού για την εισαγωγή τους στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Κάποιοι από τους μαθητές αυτούς, επιλέγουν να διαγωνιστούν και σε αθλήματα ή Αγγλικά. Συγκεκριμένα, 40 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα, 15 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και στα Αγγλικά, ενώ 10 μαθητές έχουν επιλέξει να διαγωνιστούν και σε αθλήματα και στα Αγγλικά.

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές και θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

A : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα αθλήματα» και

Γ : «ο μαθητής επιλέγει να διαγωνιστεί και στα Αγγλικά»

α) Να πείτε πότε πραγματοποιείται το ενδεχόμενο $A \cup \Gamma$ και να βρείτε την πιθανότητα του.

β) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα τέσσερα μαθήματα προσανατολισμού».

Λύση

α) Το ενδεχόμενο $A \cup \Gamma$ είναι κάποιος μαθητής να διαγωνιστεί στα αθλήματα ή τα Αγγλικά.

$$P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{40}{120} + \frac{15}{120} - \frac{10}{120} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}.$$

β) Ο μαθητής διαγωνίζεται μόνο στα 4 μαθήματα προσανατολισμού όταν δεν επιλέξει κανένα από τα A και Γ, δηλαδή το συμπληρωματικό ενδεχόμενο. Άρα $P((A \cup \Gamma)') = 1 - P(A \cup \Gamma) = \frac{5}{8}$.

31508. Από σχετική μελέτη γνωρίζουμε ότι το 50% των εργαζομένων μιας πόλης για την μετάβασή τους στην εργασία τους χρησιμοποιούν κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς, το 40% χρησιμοποιούν κάποιο ιδιωτικό μέσο μεταφοράς και 15% χρησιμοποιούν και κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς και ιδιωτικό μέσο μεταφοράς. Επιλέγουμε τυχαία έναν εργαζόμενο αυτής της πόλης. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να μεταβαίνει στην εργασία του :

α) Με κάποιο μέσο μαζικής μεταφοράς ή με ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.

β) Να μην χρησιμοποιεί μέσο μαζικής ούτε ιδιωτικό μέσο μεταφοράς.

Λύση

α) Έστω A το ενδεχόμενο να χρησιμοποιεί κάποιος τα μέσα μεταφοράς για τη μετακίνησή του και B να χρησιμοποιεί ιδιωτικό μέσο. Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $A \cup B$.

$$\text{Είναι } P(A) = \frac{50}{100} = 0,5, \quad P(B) = \frac{40}{100} = 0,4 \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{15}{100} = 0,15.$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,4 - 0,15 = 0,75$$

β) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A \cup B)'$ και έχει πιθανότητα

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,75 = 0,25$$

36378. Ο Πέτρος έχει στην τσέπη του 5 διαφορετικά κέρματα: 3 κέρματα αξίας 1 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα, την Αυστρία και την Ιταλία και 2 κέρματα αξίας 2 ευρώ το καθένα, από την Ελλάδα και την Αυστρία.



Ο Πέτρος βγάζει τυχαία ένα κέρμα, το καταγράφει και το ξαναβάζει στην τσέπη του. Στη συνέχεια βγάζει τυχαία ένα δεύτερο κέρμα από την τσέπη του και το καταγράφει.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 25 διαφορετικοί τρόποι που μπορεί ο Πέτρος να βγάλει τα δύο κέρματα από την τσέπη του.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «το πρώτο κέρμα έχει αξία 1 ευρώ και το δεύτερο έχει αξία 2 ευρώ»,

ii. B: «τα δύο κέρματα έχουν διαφορετική αξία»,

iii. Γ: «τα δύο κέρματα έχουν την ίδια αξία».

Λύση

Κάθε φορά που ο Πέτρος επιλέγει ένα νόμισμα έχει 5 επιλογές, οπότε υπάρχουν $5 \cdot 5 = 25$ συνδυασμοί νομισμάτων.

β) i. Επειδή υπάρχουν 3 κέρματα του 1 ευρώ, για το πρώτο κέρμα υπάρχουν 3 τρόποι να επιλεγεί. Όμοια για το 2ο κέρμα υπάρχουν 2 επιλογές, οπότε $N(A) = 3 \cdot 2 = 6$.

Επειδή η επιλογή είναι τυχαία από τον Πέτρο, τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{25}$

ii. Στο προηγούμενο σκέλος βρήκαμε ότι υπάρχουν 6 ζεύγη κερμάτων στα οποία το 1ο είναι του 1 ευρώ και το 2ο των 2 ευρώ. Όμοια υπάρχουν άλλα 6 ζεύγη κερμάτων από τα οποία το 1ο είναι των 2 ευρώ και το 2ο του 1 ευρώ, επομένως υπάρχουν 12 ζεύγη με κέρματα διαφορετικής αξίας.

$$\text{Είναι } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{25}.$$

iii. Επειδή τα δύο νομίσματα που επιλέγονται θα έχουν την ίδια αξία ή διαφορετική αξία, τα ενδεχόμενα B και Γ είναι συμπληρωματικά, οπότε $P(B) + P(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow P(\Gamma) = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$.

36380. Σε μία έρευνα συμμετείχαν 200 άτομα, τα οποία συνδέθηκαν τουλάχιστον μία φορά την προηγούμενη εβδομάδα στο διαδίκτυο.

Η ερώτηση της έρευνας αφορούσε τη συσκευή ή τις συσκευές με τις οποίες συνδέθηκαν. Το παρακάτω διάγραμμα Venn για τα άτομα που συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο, με φορητό υπολογιστή ή με επιτραπέζιο υπολογιστή δείχνει τα αποτελέσματα της έρευνας.



α) Πόσα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

- i. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο,
- ii. συνδέθηκαν μόνο με κινητό τηλέφωνο,
- iii. συνδέθηκαν με κινητό τηλέφωνο αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή;

β) Ένα από τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα, επιλέγεται τυχαία. Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό κατά τη διάρκεια της εβδομάδας:

- i. να συνδέθηκε με κινητό τηλέφωνο,
- ii. να συνδέθηκε τουλάχιστον με δύο τρόπους,
- iii. να συνδέθηκε ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους.

Λύση

α) i. 90 άτομα συνδέθηκαν μόνο από κινητό τηλέφωνο,
22 συνδέθηκαν από κινητό και από φορητό υπολογιστή,
10 από κινητό, φορητό υπολογιστή και επιτραπέζιο υπολογιστή και
24 από κινητό και επιτραπέζιο υπολογιστή.
Επομένως συνολικά από κινητό συνδέθηκαν $90+22+10+24=146$ άτομα.

ii. Μόνο με κινητό συνδέθηκαν 90 άτομα

iii. Από τα άτομα που είχαν συνδεθεί με κινητό, οι $24+10=34$ είχαν συνδεθεί και με επιτραπέζιο υπολογιστή, άρα με κινητό αλλά όχι με επιτραπέζιο υπολογιστή συνδέθηκαν οι $146-34=112$ άτομα.

β) i. Επειδή 146 από τα 200 άτομα συνδέθηκαν με κινητό, η πιθανότητα να συνδέθηκε κάποιος με κινητό τηλέφωνο είναι $\frac{146}{200} = \frac{73}{100}$.

ii. 22 άτομα συνδέθηκαν με κινητό και φορητό υπολογιστή,
10 με φορητό, επιτραπέζιο υπολογιστή και κινητό,
24 με κινητό και επιτραπέζιο υπολογιστή,
6 με φορητό, επιτραπέζιο υπολογιστή, οπότε

με τουλάχιστον με δύο τρόπους συνδέθηκαν $22+10+24+6=62$ άτομα και η πιθανότητα είναι $\frac{62}{200} = \frac{31}{100}$.

iii. 90 άτομα συνδέθηκαν μόνο με υπολογιστή, 37 μόνο με φορητό υπολογιστή και 11 μόνο με επιτραπέζιο υπολογιστή, άρα ακριβώς με έναν από τους τρεις τρόπους συνδέθηκαν $90+37+11=138$ άτομα και η πιθανότητα είναι: $\frac{138}{200} = \frac{69}{100}$.

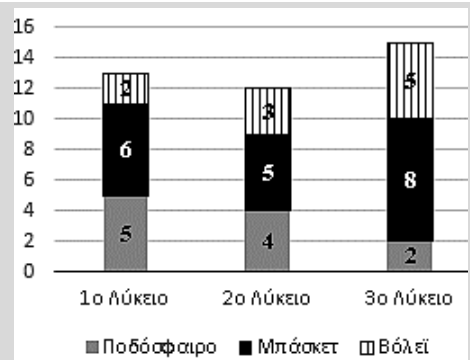
36399. Πωτήσαμε 40 μαθητές από τα τρία Λύκεια μιας πόλης ποιο από τα αθλήματα: ποδόσφαιρο, μπάσκετ ή βόλεϊ, προτιμούν.

Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, ως προς το Λύκειο φοίτησης.

Ένας από τους μαθητές επιλέγεται τυχαία.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής αυτός:

- α) να προτιμά το ποδόσφαιρο,
- β) να προτιμά το βόλεϊ ή το μπάσκετ,
- γ) να φοιτά στο 3ο Λύκειο,
- δ) να μη φοιτά στο 3ο Λύκειο.



Λύση

α) Από το ραβδόγραμμα προκύπτει ότι 5 μαθητές του 1ου Λυκείου, 4 του 2ου Λυκείου και 2 του 3ου Λυκείου προτιμούν ποδόσφαιρο, δηλαδή συνολικά $5+4+2=11$ μαθητές, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{11}{40}$.

β) Βόλεϊ προτιμούν: 2 μαθητές του 1ου Λυκείου 3 του 2ου και 5 του 3ου, δηλαδή 10 μαθητές. Μπάσκετ προτιμούν: 6 μαθητές του 1ου Λυκείου 5 του 2ου και 8 του 3ου, δηλαδή 19 μαθητές. Η

ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{10+19}{40} = \frac{29}{40}$.

γ) Στο 3ο Λύκειο φοιτούν $5+8+2=15$ μαθητές, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$.

δ) Επειδή 15 μαθητές φοιτούν στο 3ο Λύκειο, οι υπόλοιποι $40-15=25$ μαθητές δεν φοιτούν εκεί, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

36400. Σε δείγμα 100 ατόμων τέθηκε το ερώτημα αν συνδέθηκαν μια συγκεκριμένη μέρα στα δυο μέσα κοινωνικής δικτύωσης, Facebook ή YouTube. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

		YouTube		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Facebook	Ναι	32	30	62
	Όχι	12	26	38
	Σύνολο	44	56	100

Ένα από τα παραπάνω 100 άτομα επιλέγεται τυχαία. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε το άτομο αυτό:

- α) να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- β) να μη συνδέθηκε στο Facebook ούτε στο YouTube,
- γ) να συνδέθηκε στο YouTube και να μη συνδέθηκε στο Facebook,
- δ) να συνδέθηκε το πολύ σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης,
- ε) να συνδέθηκε τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης.

Λύση

α) Επειδή 38 άτομα δεν συνδέθηκαν στο Facebook, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{38}{100} = \frac{19}{50}$.

β) 26 άτομα δεν συνδέθηκαν στο Facebook και στο YouTube, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{26}{100} = \frac{13}{50}$.

γ) 12 άτομα συνδέθηκαν στο YouTube και δεν συνδέθηκαν στο Facebook, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$.

δ) Το ενδεχόμενο κάποιο άτομο να συνδέθηκε τουλάχιστον σε ένα από τα δύο μέσα κοινωνικής δικτύωσης είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου να υπήρχε άτομο που δεν συνδέθηκε ούτε στο Facebook ούτε στο YouTube, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1 - \frac{13}{50} = \frac{37}{50}$.

36469. Σ' ένα δείγμα 3000 φορολογούμενων πολιτών, οι 600 έχουν ελεγχθεί από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ) τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν. Κατά το τρέχον έτος, η ΑΑΔΕ επιλέγει για έλεγχο, τυχαία, έναν από τους παραπάνω 3000 φορολογούμενους. Έστω το ενδεχόμενο, Α: «ο φορολογούμενος έχει ελεγχθεί τουλάχιστον μία φορά κατά το παρελθόν» και το συμπληρωματικό ενδεχόμενο Α' του Α.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α.

β) Να διατυπώσετε λεκτικά το ενδεχόμενο Α'.

γ) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α'.

Λύση

α) $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{600}{3000} = \frac{1}{5}$.

β) Α': το ενδεχόμενο ο φορολογούμενος να μην έχει ελεγχθεί κατά το παρελθόν καμία φορά ».

γ) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.

36766. Σε ένα γυμνάσιο στο κέντρο της Αθήνας, για μια έρευνα, όλα τα παιδιά κάθε τάξης απάντησαν στο εξής:

«Πώς έρχεστε συνήθως το πρωί στο σχολείο;

Με τα πόδια ή με κάποιο μεταφορικό μέσο;»

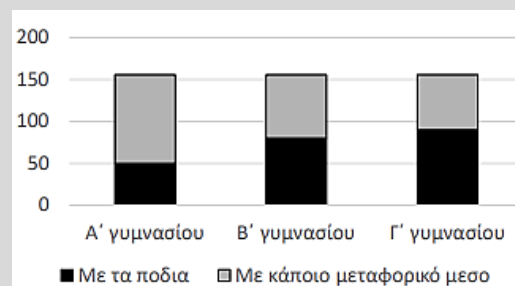
Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.

Δίνεται ότι κάθε τάξη έχει 156 παιδιά.

α) Σε ποια από τις τρεις τάξεις του γυμνασίου απάντησαν τα λιγότερα παιδιά ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια;

β) Δίνεται επιπλέον ότι τα παιδιά της Β' τάξης που απάντησαν «με τα πόδια» ήταν 80, ενώ τα παιδιά της Γ' τάξης που έδωσαν την ίδια απάντηση ήταν 90:

ι. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας.



	Β' τάξη	Γ' τάξη
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια		
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με κάποιο μεταφορικό μέσο		

ii. Επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί που φοιτά στη Β' τάξη του σχολείου. Ποια είναι η πιθανότητα να απάντησε ότι έρχεται στο σχολείο με μεταφορικό μέσο;

Λύση

α) Η στήλη που αντιστοιχεί στους μαθητές που πηγαίνουν με τα πόδια στο σχολείο, είναι μικρότερη στους μαθητές της Α Γυμνασίου.

β) i.

	Β' τάξη	Γ' τάξη
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με τα πόδια	80	90
Παιδιά που απάντησαν ότι έρχονται στο σχολείο με κάποιο μεταφορικό μέσο	$156-80=76$	$156-90=66$

ii. Με μεταφορικό μέσο πηγαίνουν στο σχολείο 76 μαθητές της Β' Γυμνασίου, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{76}{156} = \frac{19}{39}$.

4ο Θέμα

27323. Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη ενός μεροληπτικού ζαριού» με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Δίνεται ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου

«το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1» είναι $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ και ότι τα ενδεχόμενα $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ και $\{6\}$ είναι ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{10}$.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. A: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 1 ή 5»

ii. B: «Το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος αριθμός».

γ) Έστω ένα δεύτερο πείραμα τύχης «ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού» με τον ίδιο δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του οποίου όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

Να βρείτε για το δεύτερο πείραμα τύχης τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B του ερωτήματος β) και να τις συγκρίνετε μεταξύ τους.

Λύση

α) Έστω $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \lambda \in [0, 1]$, τότε

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 5\lambda = 1 \Leftrightarrow 5\lambda = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5\lambda = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

β) i. Είναι $A = \{1, 5\}$, άρα $P(A) = P(\{1\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = 0,6$

ii. Είναι $B = \{2, 4, 6\}$ και $P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{3}{10}$

γ) Επειδή τα αποτελέσματα των ρίψεων είναι ισοπίθανα, ισχύει ότι

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}, \text{ οπότε } P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ και } P(B_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Είναι } \frac{1}{3} < \frac{3}{5} \Leftrightarrow P(A_1) < P(A) \text{ και } \frac{3}{10} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(B) < P(B_1).$$

27129. Σε ένα σχολείο στη Γ' Λυκείου φοιτούν 100 μαθητές. Στην τάξη αυτή δεν υπάρχουν αδέρφια, οπότε οι 100 μαθητές αντιστοιχούν σε 100 διαφορετικές οικογένειες.

Ρωτήσαμε τους 100 μαθητές το πλήθος των παιδιών της οικογένειάς τους. Από τις απαντήσεις τους προέκυψε ότι οι οικογένειες των μαθητών έχουν το πολύ τέσσερα παιδιά. Συγκεκριμένα, οι 56 οικογένειες έχουν δύο παιδιά, 20 οικογένειες έχουν τρία παιδιά, 8 οικογένειες έχουν τέσσερα παιδιά και οι υπόλοιπες έχουν ένα παιδί.

α) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια από τις παραπάνω οικογένειες των μαθητών, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

i. «Η οικογένεια του μαθητή έχει τέσσερα παιδιά».

ii. «Η οικογένεια του μαθητή έχει λιγότερα από τρία παιδιά».

β) Στην γιορτή αποφοίτησης συμμετείχαν όλοι οι μαθητές της Γ' Λυκείου με τις οικογένειές τους. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τα παρευρισκόμενα παιδιά, ποια είναι η πιθανότητα η οικογένειά του να έχει τέσσερα παιδιά;

γ) Να συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα α) i. και β) και στην περίπτωση που είναι διαφορετικές να δικαιολογήσετε γιατί συμβαίνει αυτό.

Λύση

α) i. Επειδή 8 οικογένειες έχουν 4 παιδιά, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{8}{100} = 0,08$.

ii. Οι οικογένειες με λιγότερα από 3 παιδιά είναι $100 - 20 - 8 = 72$, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{72}{100} = 0,72$.

β) Επειδή στη γιορτή παρευρίσκονταν όλες οι οικογένειες με όλα τους τα παιδιά, το σύνολο των παιδιών είναι: $16 \cdot 1 + 56 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 8 \cdot 4 = 220$ παιδιά. Τα παιδιά που ανήκουν στις οικογένειες με 4 παιδιά είναι

$8 \cdot 4 = 32$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{32}{220} = \frac{8}{55}$.

γ) Στο α i. βρήκαμε τη πιθανότητα μια οικογένεια να έχει 4 παιδιά, οπότε επιλέγαμε ανάμεσα στις 100 οικογένειες. Στο β) ο δειγματικός χώρος ήταν άλλος, ήταν το σύνολο των παρευρισκόμενων και στο δειγματικό αυτό χώρο κάθε οικογένεια εκπροσωπείται από όλα της τα παιδιά και όχι μόνο από 1 που ήταν στο α i.

27130. Θεωρούμε τις οικογένειες που είναι δυνατό να σχηματιστούν με τρία παιδιά. Εξετάζουμε τα παιδιά των οικογενειών αυτών ως προς το φύλο και τη σειρά γέννησής τους. Για παράδειγμα η τριάδα (α, κ, α) αντιστοιχεί σε οικογένεια με πρώτο παιδί αγόρι, δεύτερο παιδί κορίτσι και τρίτο παιδί αγόρι.

α) Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα :

A: «Το πρώτο παιδί της οικογένειας είναι κορίτσι».

B: «Και τα τρία παιδιά είναι ίδιου φύλου».

Γ: «Το φύλο του δεύτερου παιδιού είναι διαφορετικό από το φύλο του πρώτου και του τρίτου παιδιού».

β) Αν μία οικογένεια αποκτήσει τρία παιδιά :

i. Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο παιδί της οικογένειας να είναι κορίτσι;

ii. Ποια είναι η πιθανότητα και τα τρία παιδιά της οικογένειας να είναι ίδιου φύλου;

iii. Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το ενδεχόμενο Γ έχει ίδια πιθανότητα να συμβεί με το ενδεχόμενο να φέρει κάποιος 2 φορές κεφαλή αν στρίψει δυο φορές ένα αμερόληπτο κέρμα.

Συμφωνείτε με την άποψή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) $A = \{(κ, κ, κ), (κ, κ, α), (κ, α, κ), (κ, α, α)\}$, $B = \{(κ, κ, κ), (α, α, α)\}$, $\Gamma = \{(κ, α, κ), (α, κ, α)\}$.

β) i. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$$\Omega = \{(a, a, a), (a, a, \kappa), (a, \kappa, a), (a, \kappa, \kappa), (\kappa, a, a), (\kappa, a, \kappa), (\kappa, \kappa, a), (\kappa, \kappa, \kappa)\},$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{iii. } P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Αν κάποιος στρίψει ένα νόμισμα 2 φορές τότε αν K είναι το αποτέλεσμα της ρίψης να είναι κεφαλή και Γ να είναι γράμματα, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega' = \{(K, K), (K, \Gamma), (\Gamma, K), (\Gamma, \Gamma)\}$.

$$\text{Αν } \Delta \text{ το ενδεχόμενο να έρθουν δύο κεφαλές, τότε } \Delta = \{(K, K)\} \text{ και } P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega')} = \frac{1}{4}.$$

Οπότε πράγματι είναι σωστός ο ισχυρισμός του μαθητή.

27349. Σ' ένα διαγώνισμα δύο ερωτήσεις είναι πολλαπλής επιλογής, με τέσσερις δυνατές απαντήσεις η καθεμία τις α, β, γ και δ . Η σωστή απάντηση στην πρώτη ερώτηση είναι η α και στη δεύτερη η δ . Ένας μαθητής επιλέγει τυχαία την απάντηση για καθεμία από τις δύο ερωτήσεις.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές απαντήσεις στις δύο ερωτήσεις.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- i.** ο μαθητής απάντησε σωστά στην πρώτη ερώτηση,
- ii.** ο μαθητής απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση,
- iii.** ο μαθητής απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις,
- iv.** ο μαθητής δεν απάντησε σωστά σε καμία από τις δύο ερωτήσεις.

Λύση

α) Επειδή σε κάθε μία από τις δύο ερωτήσεις η απάντηση είναι α ή β ή γ ή δ , ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\alpha, \beta\beta, \beta\gamma, \beta\delta, \gamma\alpha, \gamma\beta, \gamma\gamma, \gamma\delta, \delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma, \delta\delta\}$

β) i. Έστω A το ενδεχόμενο ο μαθητής να απάντησε σωστά στη πρώτη ερώτηση, τότε επειδή η σωστή απάντηση στη 1η ερώτηση είναι α , έχουμε $A = \{\alpha\alpha, \alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta\}$, άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

ii. Έστω B το ενδεχόμενο ο μαθητής να απάντησε σωστά στη δεύτερη ερώτηση, τότε επειδή η σωστή απάντηση στη 2η ερώτηση είναι δ , έχουμε $B = \{\alpha\delta, \beta\delta, \gamma\delta, \delta\delta\}$, άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

iii. Το ενδεχόμενο ο μαθητής να απάντησε σωστά και στις δύο ερωτήσεις είναι το $A \cap B = \{\alpha\delta\}$ με $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$.

iv. Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A \cup B)'$ με

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \Leftrightarrow P((A \cup B)') = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}.$$

27454. Ένα μη αμερόληπτο ζάρι με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ είναι φτιαγμένο έτσι, ώστε η πιθανότητα του απλού ενδεχομένου $\{6\}$ να είναι ίση με $\frac{1}{3}$. Για τις άλλες 5 έδρες του ισχύουν τα εξής: Τα απλά ενδεχόμενα $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$ είναι ισοπίθανα και η πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{1, 3, 5\}$ είναι ίση με $\frac{1}{6}$. Τα απλά ενδεχόμενα $\{2\}$ και $\{4\}$ είναι επίσης ισοπίθανα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}$

ii. $P(\{2\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$

β) Σε μία τυχαία ρίψη του ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

i. A: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος»

ii. B: «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι 3 ή 4»

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο με δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου B του ερωτήματος β) ii. και να συγκρίνετε τα δύο αποτελέσματα.

Λύση

α) i. Είναι $P(6) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{6}$ και επειδή $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$, είναι

$$3P(\{1\}) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(\{1\}) = \frac{1}{18}, \text{ οπότε } P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = \frac{1}{18}.$$

ii. Είναι $P(\{2\}) = P(\{4\})$ και $P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow$

$$3 \cdot \frac{1}{18} + 2P(\{2\}) + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow 2P(\{2\}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(\{2\}) = \frac{1}{4} = P(\{4\})$$

β) i. Είναι $B = \{2, 4, 6\}$ με $P(B) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

ii. $P(B) = P(\{3\}) + P(\{4\}) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4} = \frac{11}{36}$

γ) Αν το ζάρι είναι αμερόληπτο τότε $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$, οπότε

$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Επειδή $\frac{1}{3} > \frac{11}{36}$, η πιθανότητα να έρθει 3 ή 4 στη ρίψη με το αμερόληπτο ζάρι είναι μεγαλύτερη.

28856. Σ' ένα εκπαιδευτικό κατάστημα, ένας πελάτης θέλει να αγοράσει ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν. Τα διαθέσιμα μεγέθη και για τα δύο είδη είναι μικρό (s), μεσαίο (m), και μεγάλο (L). Τα σωστά μεγέθη που φοράει ο πελάτης, για το πουκάμισο είναι μεσαίο (m), ενώ για το μπουφάν, είναι μεγάλο (L). Ο πελάτης επιλέγει τυχαία ένα πουκάμισο και ένα μπουφάν χωρίς να κοιτάζει τα μεγέθη τους.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης, να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο που να περιέχει όλες τις δυνατές επιλογές για το μέγεθος των δύο ειδών (πουκάμισο και μπουφάν) που επιλέγει ο πελάτης.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

i. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο.

ii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν.

iii. Ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη.

iv. Ο πελάτης δεν επέλεξε το σωστό μέγεθος σε κανένα από τα δύο είδη.

Λύση

α) $\Omega = \{ss, sm, sL, ms, mm, mL, Ls, Lm, LL\}$.

β) i. Αν A είναι το ενδεχόμενο ο πελάτης να επέλεξε το σωστό μέγεθος για το πουκάμισο, τότε

$$A = \{ms, mm, mL\}, N(A) = 3 \text{ και } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

ii. Αν B το ενδεχόμενο ο πελάτης να επέλεξε το σωστό μέγεθος για το μπουφάν, τότε

$$B = \{sL, mL, LL\}, N(B) = 3 \text{ και } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

iii. Το ενδεχόμενο ο πελάτης επέλεξε το σωστό μέγεθος για ένα τουλάχιστον από τα δύο είδη είναι το

$$A \cup B = \{ms, mm, mL, Ls, LL\} \text{ και έχει πιθανότητα } P(A \cup B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{9}$$

iv. Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A \cup B)'$ και έχει πιθανότητα

$$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

29954. Σε ένα σχολείο φοιτούν 600 μαθητές. Οι γυμναστές του σχολείου ανά μήνα προσπαθούν να εξοικειώνουν τους μαθητές τους με διαφορετικές αθλητικές δραστηριότητες. Ο μήνας Φεβρουάριος είναι αφιερωμένος στη Γιόγκα και το Χορό. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να επιλέξει τουλάχιστον μια από τις δραστηριότητες Χορό ή Γιόγκα. 420 μαθητές επέλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν με Γιόγκα και 330 με Χορό.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή του σχολείου. Ονομάζουμε Γ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Γιόγκα» και Χ το ενδεχόμενο «ο μαθητής επιλέγει Χορό».

α) i. Υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες (Χορό και Γιόγκα);

ii. Είναι τα ενδεχόμενα Γ και Χ ασυμβίβαστα;

β) Τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα;

γ) i. Να αποδείξετε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» ισούται με $\frac{270}{600}$.

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο μαθητής επιλέγει μόνο μια από τις προτεινόμενες αθλητικές δραστηριότητες του μήνα».

Λύση

Είναι $N(\Omega) = 600$, $N(\Gamma) = 420$, $N(X) = 330$.

α) i. Αν δεν υπήρχαν μαθητές που επέλεξαν και τις δύο δραστηριότητες τότε

$$N(\Omega) = N(\Gamma) + N(X) \Leftrightarrow 600 = 420 + 330 \text{ αδύνατο, άρα}$$

υπάρχουν μαθητές του σχολείου που διάλεξαν το Φεβρουάριο να ασχοληθούν και με τις δύο δραστηριότητες.

ii. Επειδή τα δύο ενδεχόμενα έχουν κοινά στοιχεία, αφού υπάρχουν μαθητές που επέλεξαν και τις δύο δραστηριότητες, δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) Ναι είναι ασυμβίβαστα αφού δεν υπάρχει μαθητής που έχει επιλέξει μόνο γιόγκα και μόνο Χορό.

γ) i. Και τις δύο δραστηριότητες έχουν επιλέξει $420+330-600=150$ μαθητές, άρα μόνο Γιόγκα έχουν επιλέξει $420-150=270$ μαθητές και η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{270}{600}$.

ii. Μόνο χορό έχουν επιλέξει $330-150=180$ μαθητές, οπότε η πιθανότητα ένας μαθητής να κάνει μόνο χορό είναι $\frac{180}{600}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα: «ο μαθητής επιλέγει μόνο Χορό» και «ο μαθητής επιλέγει μόνο Γιόγκα» είναι ασυμβίβαστα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{270}{600} + \frac{180}{600} = \frac{450}{600} = \frac{3}{4}$.

36379. Κάθε άνθρωπος ανήκει σε μία μόνο, από τις τέσσερις κύριες ομάδες αίματος O, A, B ή AB.

Είναι γνωστό ότι η ομάδα O μπορεί να δώσει αίμα σε όλες τις ομάδες (O, A, B και AB).

Η ομάδα A μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις A και AB.

Η ομάδα B μπορεί να δώσει αίμα μόνο στις B και AB.

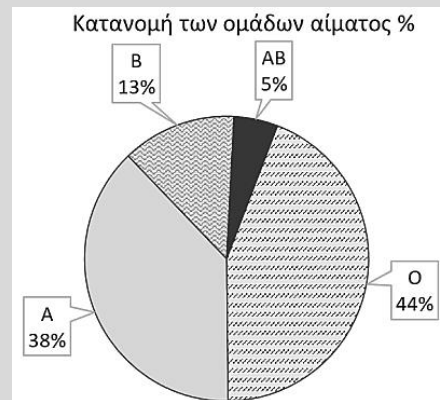
Τέλος, η ομάδα AB μπορεί να δώσει αίμα μόνο στην AB.

Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η ποσοστιαία κατανομή των ομάδων αίματος σε μία πόλη.

Ένα άτομο από αυτή την πόλη, επιλέγεται τυχαία.

Να βρείτε την πιθανότητα, αυτό να μπορεί:

- α) να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο,
- β) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A,
- γ) να δώσει αίμα σ' ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα A ή σ' ένα που ανήκει στην ομάδα B,
- δ) να δεχθεί αίμα από ένα άτομο που ανήκει στην ομάδα B,
- ε) να δεχθεί αίμα από οποιοδήποτε άτομο.



Λύση

α) Μπορεί να δώσει αίμα σε οποιοδήποτε άτομο μόνο η ομάδα αίματος O, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{44}{100} = \frac{11}{25}$.

β) Αν ένα άτομο έχει ομάδα αίματος A, τότε δέχεται αίμα από το 38% των ατόμων της ομάδας A και το 44% της ομάδας O, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{38}{100} + \frac{44}{100} = \frac{82}{100} = \frac{41}{50}$.

γ) Στην ομάδα B μπορεί να δώσει αίμα το 13% που ανήκει στην ομάδα B.

Στην ομάδα A το 38% της ομάδας A και στις δύο ομάδες μπορεί να δώσει το 44% της ομάδας O, άρα η

ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{13}{100} + \frac{38}{100} + \frac{44}{100} = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$.

δ) Η ομάδα B δέχεται αίμα από τις ομάδες B και AB, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{13}{100} + \frac{5}{100} = \frac{18}{100} = \frac{9}{50}.$$

ε) Δεν μπορεί να απαντηθεί γιατί στην εκφώνηση δεν αναφέρεται η ομάδα O από ποιες ομάδες δέχεται αίμα. Η ενδεικτική απάντηση της τράπεζας δεν είναι σε αυτό το ερώτημα.

36478. Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα, 26 κόκκινα και 26 μαύρα. Τα κόκκινα φύλλα χωρίζονται σε δυο φυλές, τις κούπες και τα καρό, και τα μαύρα επίσης σε δύο, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή αποτελείται από:

- εννέα αριθμούς: 2, 3, ..., 10
- τρεις φιγούρες: βαλές, ντάμα, ρήγας
- έναν άσο.

α) Η Μαρία τράβηξε τυχαία ένα φύλλο από μια τράπουλα. Να βρείτε τις πιθανότητες:

- i. το φύλλο να είναι η ντάμα κούπα,
- ii. το φύλλο να είναι κόκκινο και φιγούρα.

β) Η Μαρία αφαίρεσε από την αρχική τράπουλα τα φύλλα με τους αριθμούς και τράβηξε τυχαία ένα φύλλο. Πόσες φορές αυξήθηκαν οι πιθανότητες του προηγούμενου ερωτήματος;

Λύση

α) i. Η ντάμα κούπα είναι 1 από τα 52 φύλλα της τράπουλας, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{1}{52}$.

ii. Κόκκινες φιγούρες στη τράπουλα είναι οι 3 φιγούρες καρό και οι 3 φιγούρες κούπα, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{6}{52} = \frac{3}{26}$.

β) Αφαιρώντας από τη τράπουλα τα φύλλα με τους αριθμούς, αφαιρούνται $4 \cdot 9 = 36$ φύλλα, οπότε μένουν $52 - 36 = 16$ φύλλα.

Η πιθανότητα τώρα το φύλλο που επιλέγεται να είναι ντάμα κούπα είναι $\frac{1}{16}$.

Είναι $\frac{1}{16} = \frac{52}{16 \cdot 52} = \frac{52}{16} \cdot \frac{1}{52}$, οπότε η πιθανότητα αυξήθηκε κατά $\frac{52}{16}$ φορές.

Στη καινούργια τράπουλα, η πιθανότητα το φύλλο που επιλέγεται να είναι κόκκινη φιγούρα είναι $\frac{6}{16}$.

Είναι $\frac{6}{16} = \frac{6 \cdot 52}{16 \cdot 52} = \frac{52}{16} \cdot \frac{6}{52}$, οπότε η πιθανότητα αυξήθηκε κατά $\frac{52}{16}$ φορές.

1ο Θέμα

36841.α) Έστω ένα πείραμα τύχης με n ισοπίθανα αποτελέσματα. Με $P(A)$ συμβολίζουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A που περιέχει k τέτοια αποτελέσματα.

Να αντιγράψετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε την παρακάτω πρόταση:

«Η πιθανότητα του ενδεχομένου A , σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, είναι ίση με ...»

β) Έστω A ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω . Αν A' είναι το συμπληρωματικό ή αντίθετο ενδεχόμενο του A :

i. Να σχεδιάσετε ένα διάγραμμα Venn στο οποίο να φαίνονται τα A και A' .

ii. Να εξηγήσετε, με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn, γιατί ισχύει $A \cup A' = \Omega$.

iii. Να εξηγήσετε, γιατί τα A και A' είναι ασυμβίβαστα.

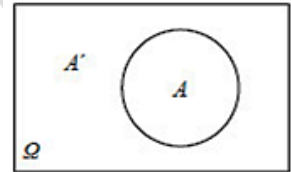
iv. Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$, όπου $P(A)$ και $P(A')$ είναι οι πιθανότητες των A και A' , αντίστοιχα.

Λύση

α) «Η πιθανότητα του ενδεχομένου A , σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό πιθανότητας, είναι ίση με

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \gg$$

β) i.



ii. Οι περιοχές που καλύπτουν τα ενδεχόμενα A και A' όταν ενωθούν δημιουργούν το ορθογώνιο Ω .

iii. Τα A και A' είναι ασυμβίβαστα γιατί δεν έχουν κοινά στοιχεία.

iv. Επειδή $A \cup A' = \Omega$ και $A \cap A' = \emptyset$, έχουμε:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow 1 = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A).$$

Συνδυαστική

2ο Θέμα

29951. Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 6 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη στις οποίες θα καθίσουν οι 5 μαθητές του συμβουλίου.

α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;

β) Να βρείτε την πιθανότητα στη συνάντηση του 5-μελούς με το διευθυντή ο πρόεδρος και ο γραμματέας να καθίσουν στις δύο ακραίες καρέκλες.

Λύση

α) Ο πρώτος μαθητής μπορεί να καθίσει σε οποιαδήποτε από τις 6 καρέκλες, ο 2ος σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 5, ο 3ος σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 4, ο 4ος σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 3 καρέκλες και ο 5ος ο 3ος σε οποιαδήποτε από τις υπόλοιπες 2 καρέκλες που είναι κενές. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης οι δυνατοί τρόποι είναι $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$.

β) Αν στη πρώτη καθίσει ο πρόεδρος και στη τελευταία ο γραμματέας τότε ο 3ος μαθητής έχει 4 επιλογές καρέκλας, ο 4ος 3 επιλογές και ο 5ος 2 επιλογές, άρα συνολικά υπάρχουν $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ τρόποι για να καθίσουν.

1η καρέκλα	2η καρέκλα	3η καρέκλα	4η καρέκλα	5η καρέκλα	6η καρέκλα
πρόεδρος	;	;	;	;	γραμματέας

Όμοια υπάρχουν 24 τρόποι να καθίσουν με το γραμματέα στη πρώτη θέση και το πρόεδρο στη τελευταία, οπότε συνολικά υπάρχουν 48 διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν με το πρόεδρο και το γραμματέα να κάθονται στη πρώτη και τη τελευταία καρέκλα.

1η καρέκλα	2η καρέκλα	3η καρέκλα	4η καρέκλα	5η καρέκλα	6η καρέκλα
γραμματέας	;	;	;	;	πρόεδρος

Αν A αυτό το ενδεχόμενο, τότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

29953. Ο διευθυντής του σχολείου έχει κανονίσει συνάντηση με τα 5-μελή συμβούλια των μαθητικών κοινοτήτων στη βιβλιοθήκη του σχολείου. Στη βιβλιοθήκη υπάρχουν 5 καρέκλες η μία δίπλα στην άλλη, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές. Για να μη ρωτάει κάθε φορά ποιος από τους μαθητές έχει εκλεγεί πρόεδρος, ζήτησε να κάθεται στην πρώτη από αριστερά καρέκλα ο πρόεδρος και στις υπόλοιπες οι άλλοι μαθητές του 5-μελούς συμβουλίου.

α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν οι μαθητές του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στη συνάντηση με το διευθυντή;

β) Να βρείτε την πιθανότητα η τοποθέτηση του 5-μελούς μαθητικού συμβουλίου στις πέντε καρέκλες να είναι: «ο πρόεδρος στην πρώτη καρέκλα, τα δύο άλλα μέλη του προεδρείου (γραμματέας – ταμίας) στις δύο επόμενες από αριστερά καρέκλες, και στη συνέχεια στις δύο επόμενες θέσεις τα δύο μέλη του μαθητικού συμβουλίου».

Λύση

α) Εκτός του προέδρου που κάθεται στη πρώτη από αριστερά καρέκλα, οι υπόλοιποι 4 μπορούν να κάτσουν στις άλλες 4 καρέκλες με $4! = 24$ τρόπους.

β) Στη 2η και 3η καρέκλα ο γραμματέας και ο ταμίας κάθονται με 2 τρόπους (Γραμματέας-ταμίας ή ταμίας-γραμματέας) στις άλλες 2 θέσεις τα 2 μέλη του προεδρείου κάθονται επίσης με δύο τρόπους, άρα

συνολικά υπάρχουν $2 \cdot 2 = 4$ τρόποι και επειδή οι συνολικοί τρόποι είναι 24, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

29955. Ένα τμήμα της Α Λυκείου έχει εβδομαδιαίο πρόγραμμα μαθημάτων που αποτελείται από επτάωρα στις 5 εργάσιμες μέρες της εβδομάδας.

α) Αν πρόκειται να επιλέξουμε μια μέρα μιας συγκεκριμένης εβδομάδας και μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος, πόσες είναι οι διαφορετικές δυνατές επιλογές;

β) Αν επιλέξουμε στην τύχη μια διδακτική ώρα για να γίνει η συνέλευση του τμήματος ποια είναι η πιθανότητα η συνέλευση να γίνει μια έβδομη διδακτική ώρα της συγκεκριμένης εβδομάδας;

Λύση

α) Επειδή η συνέλευση μπορεί να γίνει οποιαδήποτε διδακτική ώρα της εβδομάδας, υπάρχουν $5 \cdot 7 = 35$ επιλογές ώρας.

β) Την εβδομάδα υπάρχουν 5 έβδομες διδακτικές ώρες, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

4ο Θέμα

27188. Η Μαρία έχει έναν προσωπικό κωδικό πρόσβασης για το ηλεκτρονικό της ταχυδρομείο, τον οποίο επέλεξε τυχαία. Ο κωδικός αποτελείται από τέσσερις μονοψήφιους αριθμούς (τέσσερα ψηφία), σε τέσσερις αντίστοιχες θέσεις όπως παρακάτω:

— — — —

Η Μαρία δε θυμάται το τελευταίο ψηφίο του προσωπικού κωδικού της.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να πληκτρολογήσει σωστά τον προσωπικό της κωδικό, επιλέγοντας τυχαία το τελευταίο ψηφίο;

β) Επειδή δεν πληκτρολόγησε σωστά τον κωδικό της, αποφάσισε να τον αλλάξει. Ο νέος κωδικός θα έχει επίσης τέσσερα ψηφία σε τέσσερις θέσεις. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 10000 διαφορετικοί κωδικοί που μπορεί να δημιουργήσει η Μαρία.

γ) Για να αλλάξει τον κωδικό της επέλεξε τυχαία τον αριθμό κάθε θέσης. Ποια είναι η πιθανότητα στον προσωπικό κωδικό της να μην επαναλαμβάνεται κάποιος από τους αριθμούς;

Λύση

α) Υπάρχουν 10 επιλογές ψηφίου για τον 4ο αριθμό και μόνο ένας είναι ο σωστός, άρα η πιθανότητα να πετύχει το σωστό κωδικό είναι $\frac{1}{10}$.

β) Επειδή σε κάθε μία από τις 4 θέσεις υπάρχουν 10 επιλογές ψηφίου, υπάρχουν $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ διαφορετικοί κωδικοί.

γ) Για το 1η θέση υπάρχουν 10 επιλογές ψηφίου. Για τη δεύτερη θέση υπάρχουν 9 επιλογές αφού δεν πρέπει να επαναλαμβάνονται τα ψηφία. Όμοια για τη 3η θέση 8 επιλογές και για τη 4η θέση 7 επιλογές ψηφίου, άρα συνολικά υπάρχουν $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5.040$ διαφορετικοί κωδικοί.

Η πιθανότητα να επιλέξει τέτοιο κωδικό είναι $\frac{5.040}{10.000} = 0,504$.

27336. Η τράπουλα αποτελείται από 52 φύλλα τα οποία χωρίζονται σε τέσσερις φυλές: τις κούπες, τα καρό, τα μπαστούνια και τα σπαθιά. Κάθε φυλή έχει 13 φύλλα με τις παρακάτω ενδείξεις: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, βαλές (J), ντάμα (Q), ρήγας (K) και άσος (A).

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι 270.725.

β) Από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα επιλέγουμε τυχαία τέσσερα φύλλα. Να βρείτε τις πιθανότητες να πάρουμε:

- τέσσερα 10 (δεκάρια)
- Τέσσερα φύλλα με την ίδια ένδειξη.

Λύση

α) Το πλήθος των συνδυασμών των 52 φύλλων ανά 4 είναι

$$\binom{52}{4} = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52!}{4! \cdot 48!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 270.725$$

β) i. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από όλες τις δυνατές τετράδες φύλων, άρα $N(\Omega) = 270.725$. Η τετράδα που αποτελούνται από 4 δεκάρια είναι μόνο μία, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{270.725}$.

ii) Έστω το ενδεχόμενο A: «Τα τέσσερα φύλλα που επιλέγουμε έχουν την ίδια ένδειξη». Υπάρχουν 13 τετράδες φύλλων με την ίδια ένδειξη, άρα $N(A) = 13$, οπότε

$$P(A) = \frac{13}{270.725} = \frac{1}{20.825}$$

27451. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Για παράδειγμα, ένα αποτέλεσμα του παραπάνω πειράματος θα μπορούσε να είναι της μορφής 34, που σημαίνει ότι η ένδειξη της 1^η ρίψης είναι 3 και της 2^{ης} είναι 4.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A: «Το γινόμενο των 2 ενδείξεων να είναι 6»

B: «Η ένδειξη στη 2^η ρίψη είναι μεγαλύτερη από την ένδειξη στην 1^η ρίψη»

Γ: «Το άθροισμα των 2 ενδείξεων να είναι 5»

α) i. Να γράψετε έναν κατάλληλο δειγματικό χώρο για το παραπάνω πείραμα τύχης.

ii. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα A, B, Γ.

iii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup \Gamma$ και $B \cap \Gamma$.

β) Μετά τη 2^η ρίψη, κάνουμε και 3^η ρίψη με το ίδιο ζάρι.

i. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα στις 3 ρίψεις του ζαριού;

ii. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου, να έχουμε την ίδια ένδειξη και στις 3 ρίψεις.

Λύση

α) i. Επειδή σε κάθε ρίψη του ζαριού υπάρχουν 6 δυνατά αποτελέσματα, ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 36 ζεύγη αριθμών.

1 ^η \ 2 ^η	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

ii. $A = \{ (1,6), (6,1), (2,3), (3,2) \}$

$B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$
 $\Gamma = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$

iii. Είναι $A \cup \Gamma = \{(1,6), (6,1), (2,3), (3,2), (1,4), (4,1)\}$ και $P(A \cup \Gamma) = \frac{N(A \cup \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

και $B - \Gamma = \{(1,2), (1,3), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$, οπότε
 $P(B - \Gamma) = \frac{N(B - \Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{13}{36}$.

β) i. Επειδή σε κάθε ρίψη υπάρχουν 6 αποτελέσματα και στις 3 ρίψεις θα υπάρχουν $6^3 = 216$ αποτελέσματα.

ii. Έστω Δ το ενδεχόμενο να έχουμε και στις 3 ρίψεις το ίδιο αποτέλεσμα, τότε

$\Delta = \{111, 222, 333, 444, 555, 666\}$ και $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

32730. Ο σύλλογος γονέων και κηδεμόνων ενός σχολείου διοργανώνει λαχειοφόρο αγορά, με σκοπό τα έσοδα των λαχνών να διατεθούν για την αγορά εξοπλισμού του σχολείου. Οι αριθμοί των λαχνών είναι όλοι οι τετραψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των λαχνών είναι 1296.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα ίδια ψηφία,

ii. να κληρωθεί ένας λαχνός με τέσσερα διαφορετικά ψηφία.

Λύση

α) Για κάθε ψηφίο του λαχνού υπάρχουν 6 επιλογές αριθμού, οπότε συνολικά υπάρχουν $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ διαφορετικοί λαχνοί.

β) i. Τα ίδια ψηφία έχουν οι λαχνοί: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555, 6666

οπότε οι ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.

ii. Ας δούμε πόσοι λαχνοί έχουν 4 διαφορετικά ψηφία.

Στο 1ο ψηφίο του λαχνού μπορεί να είναι οποιοσδήποτε από τους 6 αριθμούς. Το 2ο ψηφίο για να είναι διαφορετικού του 1ου, υπάρχουν 5 επιλογές αριθμού. Όμοια στο 3ο ψηφίο 4 και στο 4ο ψηφίο 3 επιλογές αριθμού, οπότε συνολικά υπάρχουν $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 960$ λαχνοί με διαφορετικά όλα τους τα ψηφία. Η

ζητούμενη πιθανότητα είναι: $\frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3^2}{\cancel{6} \cdot \cancel{6} \cdot 6 \cdot 6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$.

32733. Στον τελικό των 100 μέτρων ανδρών σε μια αθλητική διοργάνωση, προκρίθηκαν 8 αθλητές και θα διεκδικήσουν τα τρία μετάλλια: χρυσό, αργυρό και χάλκινο.

Υποθέτουμε ότι κάθε αθλητής είναι εξίσου πιθανό να τερματίσει σε μία οποιαδήποτε θέση από την 1η έως την 8η.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η κατάταξη των 8 αθλητών μπορεί να προκύψει με 40320 τρόπους,

ii. η τριάδα των νικητών μπορεί να προκύψει με 336 τρόπους.

β) Από τους 8 αθλητές που θα πάρουν μέρος στον τελικό, ακριβώς 2 είναι Ευρωπαίοι.

i. Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες που αποτελούνται από μη Ευρωπαίους αθλητές;

ii. Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο, Ευρωπαίος αθλητής;

Λύση

α) i. Οι δυνατοί τρόποι κατάταξης των 8 αθλητών είναι όσες και οι μεταθέσεις τους, άρα $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40.320$ τρόποι

ii. Στη πρώτη θέση μπορεί να τερματίσει οποιοσδήποτε από τους 8 αθλητές, τότε στη 2η θέση κάποιος από τους υπόλοιπους 7 και στη 3η θέση κάποιος από τους υπόλοιπους 6, άρα η κατάταξη των αθλητών μπορεί να προκύψει με $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ τρόπους.

β) i. Επειδή 6 αθλητές είναι μη Ευρωπαίοι, για τη 1η θέση υπάρχουν 6 αθλητές, για τη 2η 5 και για τη 3η 4, άρα $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ τρόποι.

ii. Η πιθανότητα να πάρει μετάλλιο μη Ευρωπαίος αθλητής είναι $\frac{120}{336} = \frac{5}{14}$, οπότε η πιθανότητα να πάρει

Ευρωπαίος αθλητής μετάλλιο είναι η συμπληρωματική της, δηλαδή $1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$.

32734. Θεωρούμε το πείραμα τύχης «ρίψη τριών συνηθισμένων ζαριών» με δειγματικό χώρο όλες τις διατεταγμένες τριάδες που σχηματίζονται με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων είναι 216.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων A , B και Γ :

i. A : «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις ίσοι αριθμοί»,

ii. B : «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τρεις διαφορετικοί αριθμοί»,

iii. Γ : «το αποτέλεσμα της ρίψης είναι τουλάχιστον δύο ίδιοι αριθμοί».

Λύση

α) Επειδή για κάθε ρίψη του ζαριού υπάρχουν 6 αποτελέσματα, και στις 3 ρίψεις το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

β) i. Είναι $A = \{111, 222, 333, 444, 555, 666\}$, οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

ii. Στη πρώτη ρίψη μπορεί να προκύψει οποιοσδήποτε από τους 6 αριθμούς. Στη δεύτερη ρίψη όμως για να προκύψει διαφορετικό αποτέλεσμα από τη 1η ρίψη υπάρχουν 5 αριθμοί και όμοια για τη 3η ρίψη 4 αριθμοί, άρα οι $N(B) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ και $P(B) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$.

iii. Επειδή το ενδεχόμενο Γ είναι συμπληρωματικό του B , είναι $P(\Gamma) = P(B') = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

32738. Ένα κουτί περιέχει 2 κόκκινες γραβάτες και 3 πράσινες γραβάτες, από τις οποίες ο Γιώργος για κάθε μέρα από τις επόμενες πέντε μέρες, θα παίρνει τυχαία μία γραβάτα να φορέσει.

α) Για το παραπάνω πείραμα τύχης να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω , όπου το αποτέλεσμα ΠΚΚΠΠ για παράδειγμα, σημαίνει ότι την πρώτη, την τέταρτη και την πέμπτη μέρα ο Γιώργος θα φορέσει πράσινη γραβάτα, ενώ τη δεύτερη και την τρίτη μέρα θα φορέσει κόκκινη γραβάτα.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, ο Γιώργος:

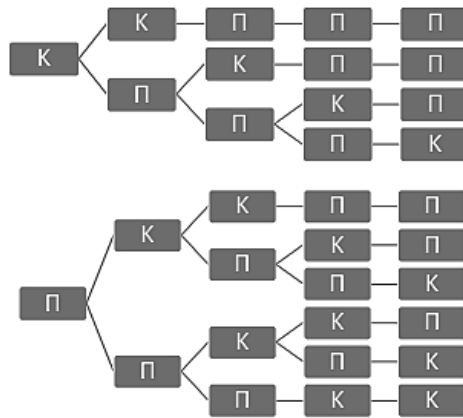
i. να φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,

ii. να μη φορέσει πράσινη γραβάτα την πρώτη μέρα,

iii. να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα.

Λύση

α) Αρχικά κατασκευάζουμε ένα δενδροδιάγραμμα για να καταγράψουμε όλες τις δυνατές περιπτώσεις.



$$\Omega = \{KK\Pi\Pi, K\Pi K\Pi, K\Pi\Pi K, K\Pi\Pi\Pi, \Pi K K\Pi, \Pi K\Pi K, \Pi K\Pi\Pi, \Pi\Pi K K, \Pi\Pi K\Pi, \Pi\Pi\Pi K\}.$$

β) i. Έστω A το ενδεχόμενο να φορέσει πράσινη γραβάτα την 1η ημέρα, τότε

$$A = \{\Pi K K\Pi, \Pi K\Pi K, \Pi K\Pi\Pi, \Pi\Pi K K, \Pi\Pi K\Pi, \Pi\Pi\Pi K\} \text{ και } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

ii. Αν δεν φορέσει πράσινη γραβάτα είναι $P(\Pi') = 1 - P(\Pi) = \frac{2}{5}$

iii. Έστω A το ενδεχόμενο να φορέσει κάθε μέρα, διαφορετικό χρώμα γραβάτας από την προηγούμενη μέρα, τότε: $A = \{\Pi K\Pi K, \Pi K\Pi\Pi\}$ και $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$

36517. Σ' ένα δείγμα 20 φορολογούμενων πολιτών, οι 4 έχουν ελεγχθεί κατά το παρελθόν, από την Ανεξάρτητη Αρχή Δημοσίων Εσόδων (ΑΑΔΕ). Το τρέχον έτος, από το παραπάνω δείγμα των 20 φορολογουμένων, η ΑΑΔΕ επιλέγει τυχαία δύο φορολογούμενους, για έλεγχο.

α) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των συνδυασμών των 20 φορολογουμένων ανά 2, είναι 190.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων, για τους δύο, τυχαία επιλεγμένους φορολογούμενους από την ΑΑΔΕ:

i. A: «και οι δύο φορολογούμενοι έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,

ii. B: «και οι δύο φορολογούμενοι δεν έχουν ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν»,

iii. Γ: «μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους, έχει ελεγχθεί από την ΑΑΔΕ κατά το παρελθόν».

Λύση

α) Οι δύο τυχαίοι πολίτες επιλέγονται με $\binom{20}{2} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{18! \cdot 19 \cdot 20}{18! \cdot 2!} = 190$ τρόπους.

β) i. Από τους 4 πολίτες που έχουν ελεγχθεί επιλέγουμε τυχαία 2 με

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 1 \cdot 2} = 6 \text{ τρόπους, άρα } P(A) = \frac{6}{190}.$$

ii. Από τους 16 που δεν έχουν ελεγχθεί επιλέγονται τυχαία 2 με

$$\binom{16}{2} = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16}{14! \cdot 1 \cdot 2} = 120 \text{ τρόπους, άρα } P(B) = \frac{120}{190} = \frac{12}{19}.$$

iii. Ο ένας που έχει ελεγχθεί επιλέγεται με 4 τρόπους και ο ένας που δεν έχει ελεγχθεί επιλέγεται με 16 τρόπους, οπότε για να επιλεγεί μόνο ένας από τους δύο φορολογούμενους που έχει ελεγχθεί, υπάρχουν

$$4 \cdot 16 = 64 \text{ τρόποι και } P(\Gamma) = \frac{64}{190} = \frac{32}{95}.$$

Στατιστική

2ο Θέμα

29014. Στα πλαίσια μιας έρευνας που διενεργήθηκε σε 300 μαθητές/μαθήτριες ενός Λυκείου σχετικά με την Κλιματική Αλλαγή τέθηκε η ερώτηση :

«Πιστεύετε ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν;»

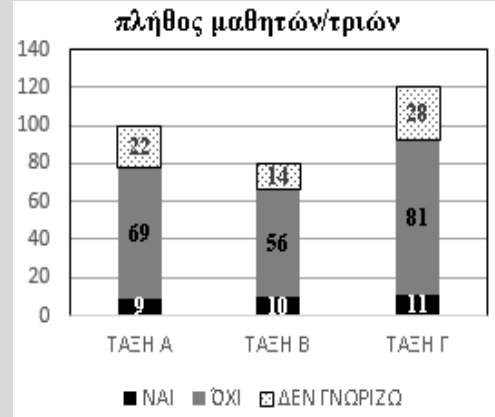
Οι απαντήσεις των μαθητών/τριών του σχολείου αναπαριστώνται στο επόμενο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:

α) Ποιο ποσοστό των μαθητών που απάντησαν ΝΑΙ πηγαίνει στην Α' Λυκείου;

β) i. Πόσοι μαθητές του Λυκείου απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες υπερβάλλουν;

Τι ποσοστό του συνόλου των μαθητών είναι;

ii. Τι ποσοστό από κάθε τάξη απάντησαν ότι η κλιματική αλλαγή είναι κάτι για το οποίο οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν;



Λύση

α) Στην Α' Λυκείου ΝΑΙ απάντησαν 9 μαθητές, στη Β 10 και στη Γ 11, οπότε συνολικά 30 μαθητές.

Το ποσοστό των μαθητών του Λυκείου που απάντησε ΝΑΙ είναι $\frac{30}{300} \cdot 100\% = 10\%$.

β) i. Είναι όσοι μαθητές απάντησαν ΝΑΙ, άρα 30 και το ποσοστό είναι 10% (γιατί ίδια ερώτηση με το α σκέλος;;)

ii. Όχι απάντησαν 69 μαθητές της Α' Λυκείου, οπότε ποσοστό $\frac{69}{100} = 69\%$.

56 της Β απάντησαν ότι οι επιστήμονες δεν υπερβάλλουν άρα ποσοστό $\frac{56}{80} = 70\%$ και 81 της Γ, άρα

ποσοστό $\frac{81}{120} = 67,5\%$.

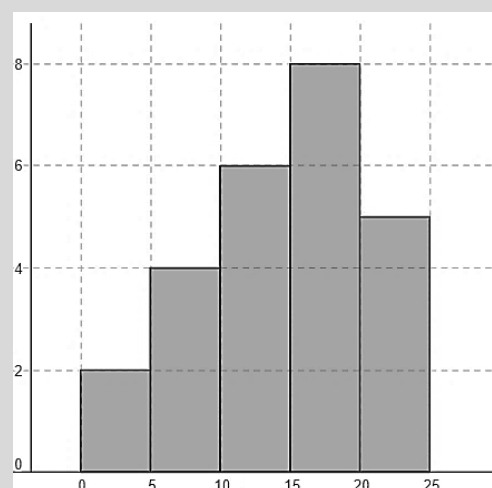
31054. Ρωτήσαμε μαθητές ενός τμήματος

«πόσο χρόνο χρειάζονται για την διαδρομή από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο» και οι απαντήσεις που πήραμε φαίνονται στο διπλανό ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Όπου ο οριζόντιος άξονας παριστάνει χρόνο σε λεπτά και ο κατακόρυφος μαθητές.

α) Να αντιγράψετε τον επόμενο πίνακα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να τον συμπληρώσετε.

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0,5)	
[5,10)	
[10,15)	
[15,20)	
[20,25)	
Σύνολο	



β) Να συμπληρώσετε το διπλανό πίνακα με τις σχετικές συχνότητες ($f_i, f_i \%$).

γ) Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 15 λεπτά για αυτήν τη διαδρομή.

δ) Να μεταφέρετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων στο γραπτό σας και να σχεδιάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

Λύση

α)

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)
[0, 5)	2
[5, 10)	4
[10, 15)	6
[15, 20)	8
[20, 25)	5
Σύνολο	25

$$\beta) f_1 = \frac{2}{25} = 0,08, \quad f_2 = \frac{4}{25} = 0,16, \quad f_3 = \frac{6}{25} = 0,24,$$

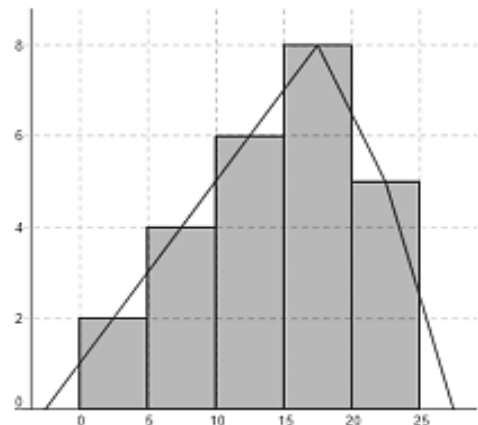
$$f_4 = \frac{8}{25} = 0,32, \quad f_5 = \frac{5}{25} = 0,20.$$

Κλάσεις με χρόνους (min)	Συχνότητα (μαθητές)	f_i	$f_i \%$
[0, 5)	2	0,08	8
[5, 10)	4	0,16	16
[10, 15)	6	0,24	24
[15, 20)	8	0,32	32
[20, 25)	5	0,20	20
Σύνολο	25	1	100

γ) Τουλάχιστον 15 λεπτά αφιερώνουν οι 8 μαθητές της κλάσης [15, 20) και οι 5 μαθητές της κλάσης [20, 25), δηλαδή το 32% και το 20% των μαθητών. Άρα το 52% των μαθητών

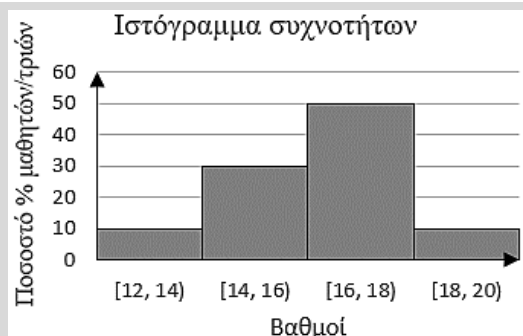
δ) Θεωρούμε δύο επιπλέον κλάσεις πλάτους όσο και οι άλλες, μία στην αρχή και μία στο τέλος, τις [0, 5) και [25, 30) με συχνότητα 0.

Ενώνουμε τα μέσα των κλάσεων και σχεδιάζετε το πολύγωνο συχνοτήτων.



32212. Το παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων % αντιστοιχεί στους βαθμούς 50 μαθητών και μαθητριών της Β' τάξης ενός Λυκείου, στο μάθημα της Λογοτεχνίας για το Α' τετράμηνο.

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.



Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα n_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
[12, 14)		
[14, 16)		
[16, 18)		
[18, 20)		
Σύνολο		

β) Τι ποσοστό των μαθητών ή μαθητριών έχουν βαθμό:

- i. 18 ή περισσότερο
- ii. μικρότερο από 14
- iii. τουλάχιστον 14.

Λύση

$$\alpha) f_1\% = 100f_1 \Leftrightarrow 10 = 100 \frac{v_1}{50} \Leftrightarrow v_1 = 5, f_2\% = 100f_2 \Leftrightarrow 30 = 100 \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 15$$

$$f_3\% = 100f_3 \Leftrightarrow 50 = 100 \frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3 = 25, f_4\% = 100f_4 \Leftrightarrow 10 = 100 \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Κλάσεις με τους βαθμούς	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
[12,14)	5	10
[14,16)	15	30
[16,18)	25	50
[18,20)	5	10
Σύνολο	50	100

β) i. Βαθμό 18 ή περισσότερο έχουν οι μαθητές της τελευταίας κλάσης άρα το 10% των μαθητών.

ii. Βαθμό μικρότερο από 14 έχουν οι μαθητές της 1ης κλάσης άρα το 10% των μαθητών.

iii. τουλάχιστον 14 έχουν όλοι οι μαθητές εκτός από αυτούς της 1ης κλάσης, άρα το 90% των μαθητών.

32213. Στη σχολική εκδρομή ενός Δημοτικού Σχολείου πήγαν ορισμένα παιδιά από κάθε μια από τις τάξεις Α', Β', Γ' και Δ'.

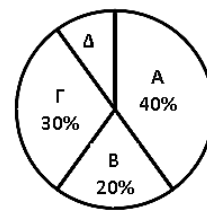
Στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται αυτά τα παιδιά ανά τάξη, ως ποσοστό επί του συνόλου των παιδιών που πήγαν στην εκδρομή.

α) Με τη βοήθεια του κυκλικού διαγράμματος να απαντήσετε στο εξής: Από ποια τάξη, από τις Α', Β', Γ' ή Δ' ήταν τα περισσότερα στην εκδρομή και από ποια τα λιγότερα;

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων.

γ) Να σχεδιάσετε το αντίστοιχο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων %.

Κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων %



- Α
- Β
- Γ
- Δ

Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
Α	
Β	
Γ	
Δ	
Σύνολο	

Λύση

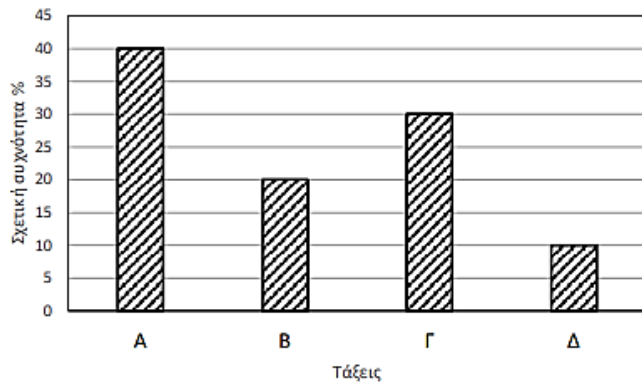
$$\alpha) \text{Είναι } f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100 \Leftrightarrow 40 + 20 + 30 + f_4\% = 100 \Leftrightarrow f_4\% = 10$$

Τα περισσότερα ήταν της Α τάξης και τα λιγότερα της Δ τάξης.

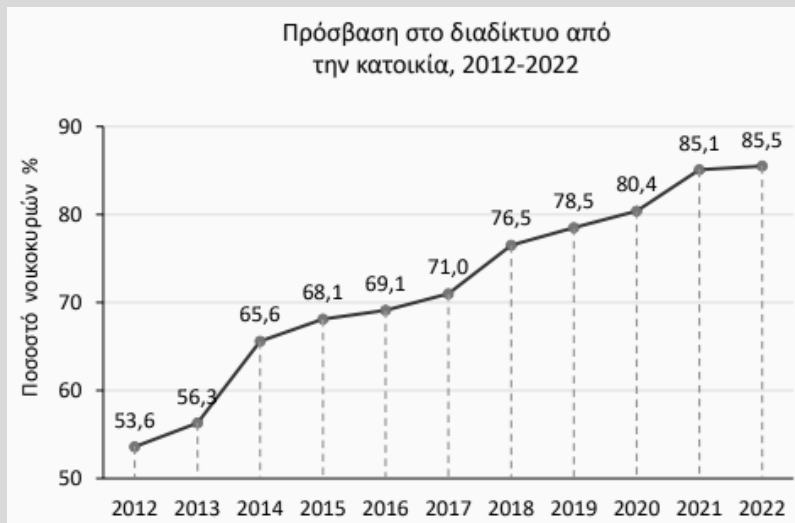
β)

Τάξη	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
Α	40
Β	20
Γ	30
Δ	10
Σύνολο	100

γ)



36381. Στο παρακάτω χρονόγραμμα φαίνεται η χρονική εξέλιξη της χρήσης του διαδικτύου των νοικοκυριών στη χώρα μας, από το 2012 έως και το 2022 (Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ, Δεκέμβριος 2022).

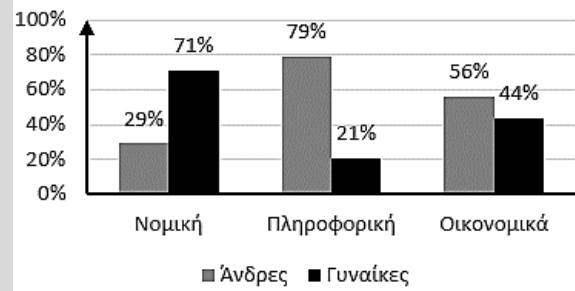


- α)** Ποιο ποσοστό νοικοκυριών είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία τους:
- i.** το έτος 2012;
 - ii.** το έτος 2022;
- β)** Στην πρόσβαση στο διαδίκτυο από την κατοικία, ποιο έτος, σε σχέση με το προηγούμενο έτος, σημειώθηκε:
- i.** η μεγαλύτερη αύξηση;
 - ii.** η μικρότερη αύξηση;

Λύση

- α)** Στο χρονόγραμμα βλέπουμε ότι:
- i.** το 2012 το 53,6% των νοικοκυριών είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο.
 - ii.** το 2022 το 85,5% των νοικοκυριών είχαν πρόσβαση στο διαδίκτυο.
- β)** **i.** Η μεγαλύτερη αύξηση σημειώθηκε από το 2013 στο 2014.
- ii.** Η μικρότερη αύξηση σημειώθηκε από το 2021 στο 2022.

36396. Τα αποτελέσματα μιας έρευνας, σχετικά με την κατανομή των φοιτητών/τριών ανά φύλο σε τρεις τομείς της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τον τομέα εκπαίδευσης.



α) Ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο είναι το είδος τους;

β) Στο σύνολο των ατόμων που σπουδάζουν

Νομική, ποιο είναι το ποσοστό των γυναικών και ποιο είναι το ποσοστό των ανδρών;

γ) Σε ποιον τομέα υπάρχει η μεγαλύτερη εκπροσώπηση γυναικών και σε ποιον η μικρότερη;

δ) Δίνεται ότι από τους παραπάνω φοιτητές/φοιτήτριες, σπουδάζουν Οικονομικά 16000 και Πληροφορική 10000. Να συγκρίνετε τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Οικονομικά με τον αριθμό των ανδρών που σπουδάζουν Πληροφορική.

Λύση

α) Οι μεταβλητές είναι το φύλο και οι τρεις τομείς της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και είναι ποιοτικές μεταβλητές.

β) Το 29% είναι άνδρες και το 71% γυναίκες.

γ) Στη πληροφορική με ποσοστό 79%.

δ) Οι άνδρες που σπουδάζουν οικονομικά είναι $\frac{56}{100} \cdot 16000 = 8960$ και οι άνδρες που σπουδάζουν

Πληροφορική είναι $\frac{79}{100} \cdot 10000 = 7900$. Επομένως οι άνδρες που σπουδάζουν Οικονομικά είναι

περισσότεροι από αυτούς που σπουδάζουν Πληροφορική.

36398. Σε μία έρευνα, τυχαία επιλεγμένοι ενήλικες, ρωτήθηκαν αν έχουν διαβάσει ένα τουλάχιστον, λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο.

Οι απαντήσεις τους, ανά φύλο, αναπαρίστανται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

α) Στην έρευνα αυτή:

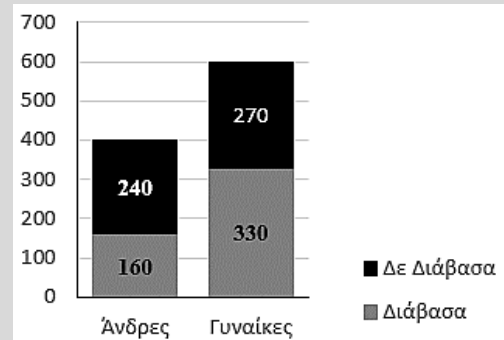
i. πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες συμμετείχαν;

ii. ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος;

β) Να βρείτε τα ποσοστά, όσων έχουν διαβάσει, ένα τουλάχιστον λογοτεχνικό βιβλίο τον τελευταίο χρόνο:

i. μεταξύ των ανδρών του δείγματος,

ii. μεταξύ των γυναικών του δείγματος, μεταξύ όλων των ατόμων του δείγματος.



Λύση

α) i. $160+240=400$ άνδρες και $330+270=600$ γυναίκες.

ii. Συνολικά ρωτήθηκαν $400+600=1000$ άνθρωποι.

β) i. τουλάχιστον ένα βιβλίο στους άνδρες έχουν διαβάσει 160 από τους 400, οπότε το ποσοστό είναι

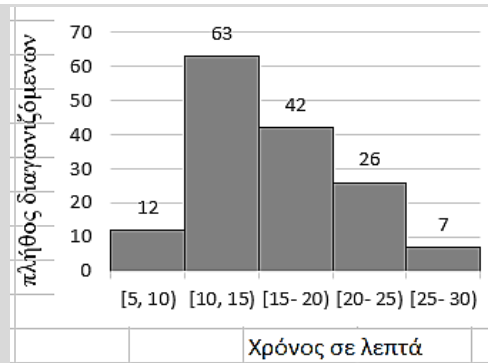
$$\frac{160}{400} \cdot 100\% = 40\%$$

ii. 330 γυναίκες από τις 600 έχουν διαβάσει τουλάχιστον ένα βιβλίο και το ποσοστό είναι

$$\frac{330}{600} \cdot 100\% = 55\%.$$

36468. 150 άτομα συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό παζλ, όπου ο στόχος είναι η συναρμολόγηση ενός παζλ στο μικρότερο δυνατό χρόνο.

Αφού καταγράφηκε ο χρόνος σε λεπτά, που χρειάστηκε το κάθε άτομο για τη συναρμολόγηση του παζλ, τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων.



α) Για την παραπάνω έρευνα:

i. ποιο είναι το μέγεθος του δείγματος;

ii. ποια είναι η μεταβλητή του δείγματος και ποιο είναι το είδος της;

β) Πόσα άτομα συναρμολόγησαν το παζλ, σε χρόνο λιγότερο από 20 λεπτά;

γ) Τα άτομα που έκαναν χρόνο λιγότερο από 10 λεπτά, προκρίνονται στην επόμενη φάση του διαγωνισμού. Ποιο είναι το ποσοστό αυτών των ατόμων;

Λύση

α) i. Τα 150 άτομα είναι το μέγεθος του δείγματος.

ii. Η μεταβλητή είναι ο χρόνος σε λεπτά και είναι ποσοτική συνεχής.

β) Λιγότερο από 20 λεπτά έκαναν οι 12 της κλάσης [5, 10), οι 63 της κλάσης [10, 15) και οι 42 της κλάσης [15, 20), άρα συνολικά $12+63+42=117$ άτομα.

γ) 12 από τα 150 άτομα προκρίνονται, οπότε το ποσοστό τους είναι $\frac{12}{150} \cdot 100\% = 8\%$.

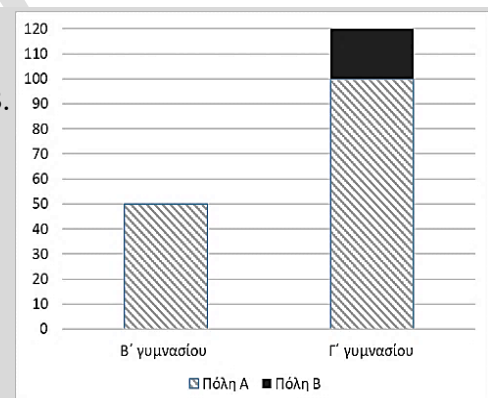
36752. Τα παιδιά των τάξεων Β' και Γ' ενός γυμνασίου πρόκειται να πάνε ημερήσια εκδρομή.

Δύο είναι οι υποψήφιοι προορισμοί, η πόλη Α και η πόλη Β. Το δεκαπενταμελές μαθητικό συμβούλιο έκανε ψηφοφορία μεταξύ των δύο πόλεων, στην οποία συμμετείχαν όλα τα παιδιά των δύο τάξεων, δηλώνοντας την προτίμησή τους (πόλη Α ή πόλη Β).

Δεν υπήρχε «λευκή» ψήφος.

Την πόλη Β προτίμησαν 60 παιδιά της Β' τάξης και 20 παιδιά της Γ' τάξης.

Στα αποτελέσματα της ψηφοφορίας αντιστοιχεί το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, από το οποίο λείπει το μέρος της ράβδου που αντιστοιχεί στα παιδιά της Β' γυμνασίου που προτίμησαν την πόλη Β.



α) Σύμφωνα με το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα:

i. Πόσα παιδιά της Β' γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α;

ii. Πόσα παιδιά της Γ' γυμνασίου συμμετείχαν στην ψηφοφορία;

β) Πόσα παιδιά της Γ' γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α;

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.

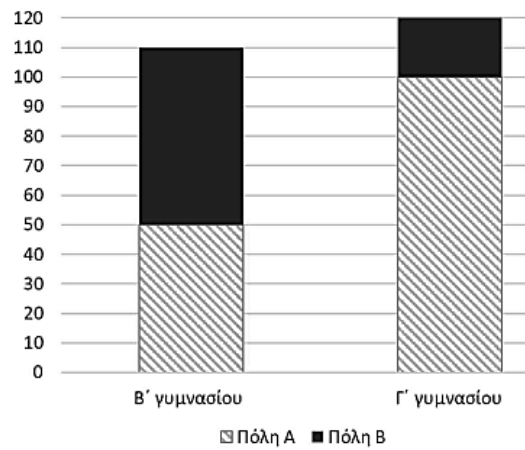
Λύση

α) i. 50 παιδιά

ii. 120 παιδιά

β) 100 παιδιά της Γ' γυμνασίου προτίμησαν την πόλη Α.

γ)



36753. Ρωτήθηκαν 120 φοιτητές και φοιτήτριες και 120 μαθητές και μαθήτριες της Γ' λυκείου, που προτιμούν να πάνε διακοπές το καλοκαίρι, μεταξύ βουνού και θάλασσας. Όλοι και όλες έδωσαν μία από τις δύο απαντήσεις αυτές.

Τα αποτελέσματα των απαντήσεών τους φαίνονται στο παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, αλλά από τη ράβδο «Μαθητές/τριες Γ' λυκείου» λείπει το μέρος που αντιστοιχεί στην απάντηση «θάλασσα».

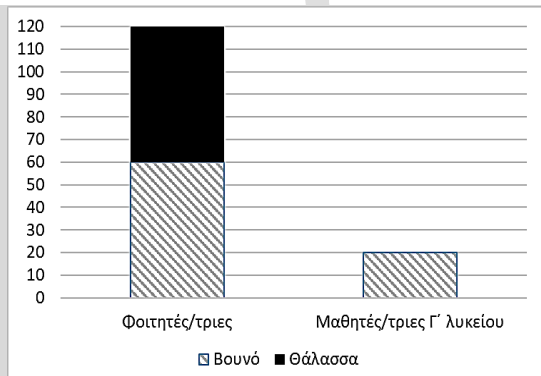
α) i. Πόσοι/ες μαθητές/τριες Γ' λυκείου απάντησαν ότι προτιμούν βουνό;

ii. Να υπολογίσετε πόσοι/ες μαθητές/τριες Γ' λυκείου απάντησαν ότι προτιμούν θάλασσα.

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) την παρακάτω πρόταση.

«Οι περισσότεροι/ες από τους φοιτητές/τριες απάντησαν ότι προτιμούν βουνό.»

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα.

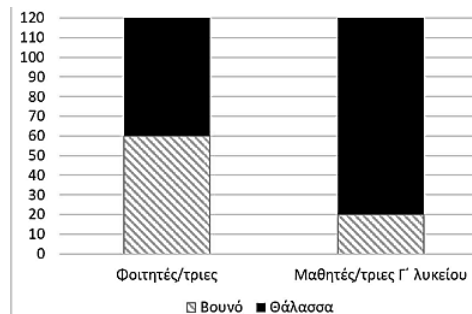


Λύση

α) i. 20 μαθητές **ii.** $120 - 20 = 100$ μαθητές

β) Λάθος

γ)



36754. Σε μια γιορτή που συμμετέχουν παιδιά των τάξεων ΣΤ' δημοτικού και Α' γυμνασίου, κάθε παιδί παίρνει, ως δώρο ένα μπαλάκι. Υπάρχουν μπλε και κόκκινα μπαλάκια, τα οποία διαφέρουν μόνο ως προς το χρώμα.

Κάθε παιδί επιλέγει ποιο χρώμα προτιμά.

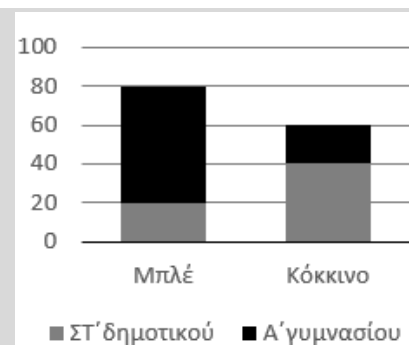
Τα αποτελέσματα των επιλογών, ανά τάξη, φαίνονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα.

α) i. Πόσα ήταν τα παιδιά που επέλεξαν μπλε μπαλάκι;

ii. Πόσα παιδιά της ΣΤ' δημοτικού επέλεξαν μπλε μπαλάκι;

iii. Πόσα παιδιά της Α' γυμνασίου επέλεξαν μπλε μπαλάκι;

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας.



		Μπαλάκι		
		Μπλε	Κόκκινο	Σύνολο
Τάξη	ΣΤ΄ δημοτικού			
	Α΄ γυμνασίου			
	Σύνολο			

Λύση

α) i. 80 παιδιά

ii. 20 παιδιά

iii. 60 παιδιά

β)

		Μπαλάκι		
		Μπλε	Κόκκινο	Σύνολο
Τάξη	ΣΤ΄ δημοτικού	20	40	60
	Α΄ γυμνασίου	60	20	80
	Σύνολο	80	60	140

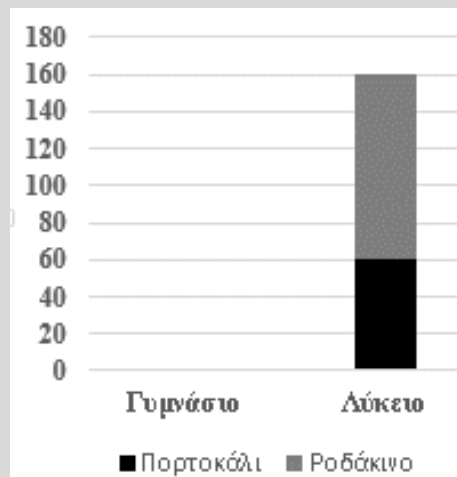
36755. Στα κυλικεία δύο σχολείων, ενός γυμνασίου και ενός λυκείου, καταγράφηκαν οι πωλήσεις ατομικών συσκευασιών του ίδιου τύπου χυμού, ως προς τη γεύση, πορτοκάλι ή ροδάκινο.

Συνολικά καταγράφηκαν οι πωλήσεις 360 συσκευασιών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	
	Λύκειο	60	100	
	Σύνολο			

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

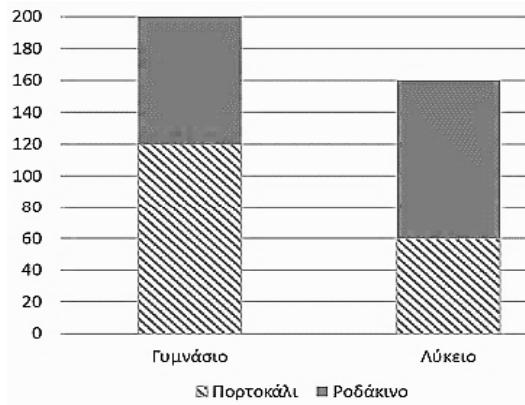
β) Να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα, με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα.

**Λύση**

α)

		Προτίμηση σε γεύση χυμού		
		Πορτοκάλι	Ροδάκινο	Σύνολο
Σχολεία	Γυμνάσιο	120	80	200
	Λύκειο	60	100	160
	Σύνολο	180	180	360

β)



36756.Μια αθλητική ομοσπονδία ποδοσφαίρου κατέγραψε πόσοι από τους 250 παίκτες των ομάδων της τραυματίστηκαν με αποτέλεσμα να χάσουν κάποιο αγώνα ή όχι, σε σχέση με τη θέση που παίζουν (αμυντικός – μέσος – επιθετικός), κατά τη διάρκεια του πρωταθλήματος 2022-23. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας:

		Απουσία λόγω τραυματισμού ή όχι		
		Απουσία από αγώνα λόγω τραυματισμού	Δεν απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού	Σύνολο
Θέση	Αμυντικός	10	40	
	Μέσος	70	60	
	Επιθετικός	30	40	
	Σύνολο			

α) Σύμφωνα με τον πίνακα συνάφειας:

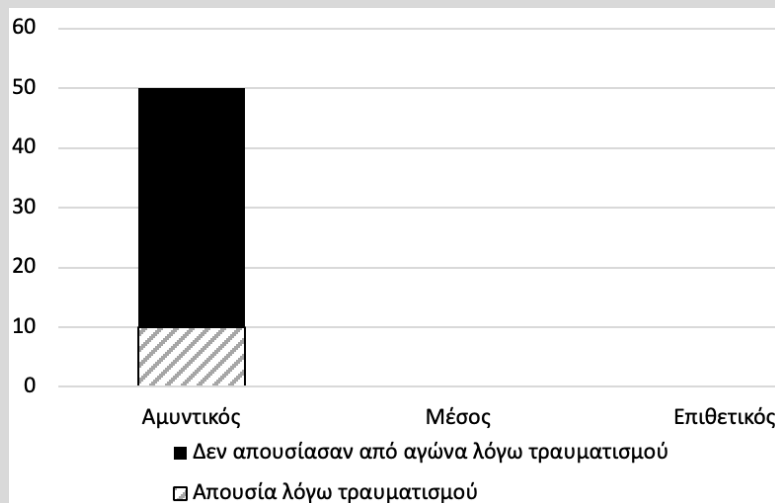
i. Πόσοι αμυντικοί απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού;

ii. Πόσοι είναι οι αμυντικοί που καταγράφονται σε αυτόν;

iii. Τι ποσοστό των αμυντικών απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού;

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω ημιτελές στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, θέσης και απουσίας από αγώνα λόγω τραυματισμού ή όχι. Να συμπληρώσετε, σε αυτό, τις δύο ράβδους που λείπουν (μέσων και επιθετικών) με τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα συνάφειας.



Λύση

α) i. 10

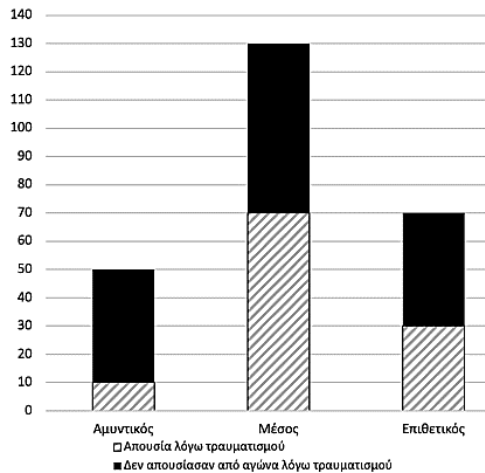
ii. $10+40=50$

iii. Απουσίασαν 10 από τους 50 οπότε το ποσοστό είναι $\frac{10}{50} \cdot 100\% = 20\%$

β)

		Απουσία λόγω τραυματισμού ή όχι		
		Απουσία από αγώνα λόγω τραυματισμού	Δεν απουσίασαν από αγώνα λόγω τραυματισμού	Σύνολο
Θέση	Αμυντικός	10	40	50
	Μέσος	70	60	130
	Επιθετικός	30	40	70
	Σύνολο	110	140	250

γ)



36757. Για τις ανάγκες μιας έρευνας, ρωτήθηκαν παιδιά για το κατοικίδιο που προτιμούν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας, ως προς το φύλο τους.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

		Προτίμηση σε κατοικίδιο		
		Γάτα	Σκύλος	Σύνολο
Φύλο	Κορίτσι	30	60	
	Αγόρι	25	50	
	Σύνολο			

β) Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

i. Πόσα παιδιά απάντησαν στην ερώτηση της έρευνας;

ii. Πόσα από τα παιδιά που απάντησαν ήταν κορίτσια;

iii. Πόσα από τα παιδιά απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο;

iv. Τι μέρος των παιδιών που απάντησαν ότι προτιμούν σκύλο ήταν κορίτσια; Να το γράψετε ως κλάσμα.

Λύση

α)

		Προτίμηση σε κατοικίδιο		
		Γάτα	Σκύλος	Σύνολο
Φύλο	Κορίτσι	30	60	90
	Αγόρι	25	50	75
	Σύνολο	55	110	165

β) i. 155

ii. 90

iii. 110

iv. 60 από τα 110 παιδιά που προτιμούν σκύλο ήταν κορίτσια, δηλαδή τα $\frac{60}{110} = \frac{6}{11}$ των ατόμων.

36758. Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) παρουσιάζονται ομαδοποιημένες σε κλάσεις οι ηλικίες, σε έτη, ενός αντιπροσωπευτικού δείγματος 10.000 κοριτσιών ή γυναικών που είναι μικρότερες από τα 90 έτη, μιας γεωγραφικής περιοχής της Ελλάδας.



Όλα τα κορίτσια και οι γυναίκες της γεωγραφικής περιοχής ήταν περίπου 1 εκατομμύριο.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας:

α) Ποια ήταν η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις;

β) Το ορθογώνιο που αντιστοιχεί στην κλάση [10, 20) έχει ύψος λίγο μικρότερο από 13. Πώς το ερμηνεύετε;

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Το δείγμα της έρευνας είχε πλήθος περίπου 1 εκατομμύριο.

ii. Η κλάση των κοριτσιών/γυναικών με τις μικρότερες ηλικίες, σε έτη, είναι η [80, 90).

iii. Οι κάτοικοι (άνδρες και γυναίκες) της γεωγραφικής περιοχής, με ηλικία, σε έτη, που ανήκει στην κλάση [30, 40) είναι λίγο λιγότεροι από το 18%, όλου του πληθυσμού της περιοχής.

iv. Υπάρχει κλάση που να αντιστοιχεί στο 10%, περίπου, των παρατηρήσεων του δείγματος.

v. Λίγο περισσότερο από το 3% του δείγματος της έρευνας είχαν ηλικία, σε έτη, μεγαλύτερη ή ίση με 80 και μικρότερη από 90.

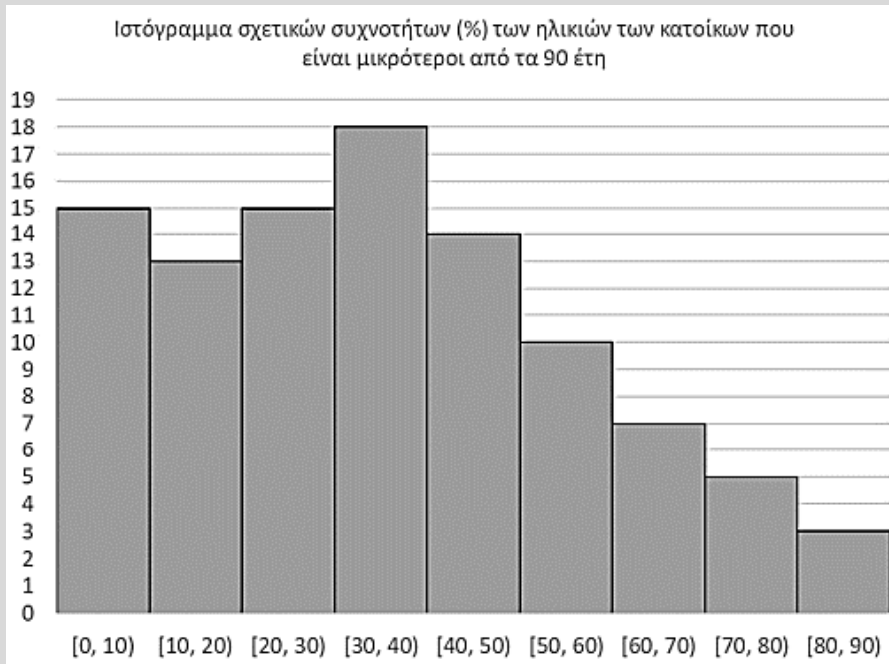
Λύση

α) Είναι αυτή με τη μικρότερη σχετική συχνότητα %, δηλαδή η (80, 90)

β) Λίγο λιγότερο από το 13% του δείγματος είναι ηλικίας (10, 20) ετών.

γ) i. Λ **ii.** Λ **iii.** Λ **iv.** Σ **v.** Σ

36759. Στο παρακάτω ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (%) παρουσιάζονται οι ηλικίες όλων των κατοίκων μιας περιοχής της Ελλάδας, που είναι μικρότεροι/-ες από τα 90 έτη ομαδοποιημένες σε κλάσεις.



Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας:

- α)** Ποια ήταν η κλάση με τις περισσότερες παρατηρήσεις;
- β)** Οι κλάσεις [0, 10) και [20, 30) έχουν το ίδιο ύψος. Πώς το ερμηνεύετε;
- γ)** Οι παρακάτω προτάσεις είναι λανθασμένες. Να εξηγήσετε γιατί.
 - i.** Η κλάση με τις λιγότερες παρατηρήσεις είναι η [0, 10).
 - ii.** Η κλάση με τις μικρότερες ηλικίες είναι η [80, 90).
 - iii.** Δεν υπάρχει κλάση που να αντιστοιχεί στο 10% των παρατηρήσεων.
 - iv.** Το 18% των κατοίκων της παραπάνω περιοχής ήταν μικρότεροι/-ες από τα 40 έτη.

Λύση

- α)** η κλάση [30, 40).
- β)** Το ποσοστό των κατοίκων ηλικίας [0, 10) είναι ίδιο με τους κατοίκους ηλικίας [20, 30).
- γ) i.** Λάθος γιατί τη μικρότερη σχετική συχνότητα %, άρα και τις λιγότερες παρατηρήσεις έχει η κλάση [80, 90).
- ii.** Λάθος, οι μικρότερες ηλικίες είναι στη κλάση [0, 10).
- iii.** Λάθος, η κλάση [50, 60) αντιστοιχεί στο 10% των παρατηρήσεων.
- iv.** Λάθος, το 15% της κλάσης [0, 10), το 12% της κλάσης [10, 20), το 15% της κλάσης [20, 30) και το 18% της κλάσης [30, 40) ήταν μικρότεροι/-ες από τα 40 έτη.

36760. Έγινε μια έρευνα με στόχο να μελετηθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των 33.495 ατόμων με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, μιας συγκεκριμένης περιφέρειας της Ελλάδας. Η εταιρεία που έκανε την έρευνα, δεν ήταν δυνατόν να συλλέξει στοιχεία από όλους τους/τις κατοίκους της συγκεκριμένης περιφέρειας ηλικίας 40 έως 49. Έτσι, συνέλεξε στοιχεία από ένα δείγμα 1.000 από αυτά τα 33.495 άτομα, αντιπροσωπευτικό των 33.495 ατόμων.

Τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν:

- Η ηλικία τους (σε έτη),
- αν εργάζονταν (ναι ή όχι),

- ο πιο πρόσφατος τίτλος σπουδών που είχαν (απολυτήριο γυμνασίου, λυκείου, κτλ.),
- το επάγγελμά τους (αν εργάζονταν),
- πόσα έτη είχαν εργαστεί στο παρελθόν,
- ο χρόνος που έκαναν για να φτάσουν στην εργασίας τους, σε λεπτά (αν εργάζονταν),
- η οικογενειακή τους κατάσταση (άγαμοι-άγαμες, έγγαμοι-έγγαμες, κτλ.).

Ανάμεσα στα ευρήματα της έρευνας καταγράφηκαν τα εξής:

- Η επικρατούσα τιμή, όσο αφορά την ηλικία τους ήταν τα 46 έτη.
- Οι έγγαμοι-έγγαμες ήταν 623.
- Στην ερώτηση αν εργάζονταν, όλοι/-ες απάντησαν με «ναι» ή «όχι». Το 8% απάντησαν «όχι».

α) Ποιο ήταν το μέγεθος του πληθυσμού της έρευνας και ποιο του δείγματος που επέλεξε η εταιρεία;

β) Ποια από τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν ποσοτικά και ποια ποιοτικά;

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η ηλικία, σε έτη, στην οποία βρίσκονται περισσότερα άτομα του δείγματος από όλες τις άλλες ηλικίες ήταν 46.

ii. Από τα ευρήματα στο δείγμα μπορούμε να συμπεράνουμε με ασφάλεια ότι η επικρατούσα τιμή της ηλικίας, σε έτη, όλων των κατοίκων της περιφέρειας ήταν 46.

iii. Το 92% των ατόμων που συμμετείχαν στην έρευνα απάντησαν ότι εργάζονταν.

iv. Έχουμε ενδείξεις ότι, από όλους/-ες τους/τις κατοίκους της περιφέρειας με ηλικίες από τα 40 έως τα 49 έτη, οι περισσότεροι/-ες ήταν έγγαμοι- έγγαμες.

Λύση

α) Το μέγεθος του πληθυσμού ήταν 33.495 και το μέγεθος του δείγματος ήταν 1.000 άτομα.

β) Ποιοτικά: αν εργάζονταν, ο πιο πρόσφατος τίτλος σπουδών τους, οικογενειακή κατάσταση.

Ποσοτικά: ηλικία, έτη εργασίας στο παρελθόν, ο χρόνος που χρειάζονταν να φτάσουν στην εργασία τους.

γ) i. Σ ii. Λ iii. Σ iv. Σ

36762. Έγινε μια έρευνα σε παραγωγούς μελιού, στα Δωδεκάνησα και στις Κυκλάδες, ως προς το είδος μελιού που παρήγαγαν το προηγούμενο έτος (ανθέων – θυμαρίσιο). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων, ως προς την περιοχή παραγωγής μελιού (η παραγωγή μετρήθηκε σε βάρος).

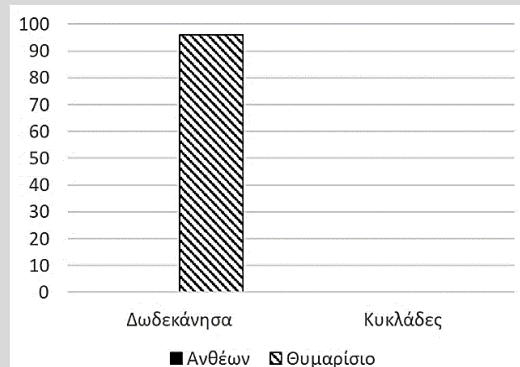
		Παραγωγή μελιού ως προς το είδος		
		Ανθέων	Θυμαρίσιο	Σύνολο
Περιοχές	Δωδεκάνησα	4%	96%	100%
	Κυκλάδες	16%	84%	100%
	Σύνολο			

α) Ποιο ήταν το ποσοστό της παραγωγής μελιού ανθέων των συγκεκριμένων παραγωγών της έρευνας, ανά περιοχή;

β) Ποια ήταν τα ποσοστά ανά είδος μελιού στα Δωδεκάνησα, για τους παραγωγούς της έρευνας;

γ) Στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς την περιοχή παραγωγής μελιού, το οποίο αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα συνάφειας φαίνεται μόνο η μία ράβδος.

Να γράψετε σε τι αντιστοιχεί η ράβδος αυτή και να συμπληρώσετε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα με



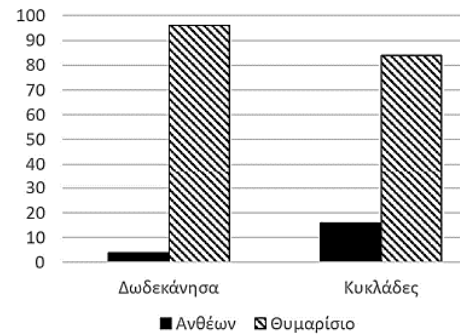
τις τρεις ράβδους που λείπουν, αφού το μεταφέρετε στην κόλλα σας.

Λύση

α) Στα Δωδεκάνησα 4% και στις Κυκλάδες 16%.

β) 4% Ανθέων και 96% Θυμαρίσιο.

γ) Η ράβδος αντιστοιχεί στη παραγωγή Θυμαρίσιου μελιού στα Δωδεκάνησα.



36763. Οι μαθητές και οι μαθήτριες της Α' τάξης ενός γυμνασίου διδάσκονται Αγγλικά ως πρώτη ξένη γλώσσα, ενώ ως δεύτερη ξένη γλώσσα επιλέγουν είτε τα Γαλλικά, είτε τα Γερμανικά.

Στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται το ποσοστό των παιδιών της Α' τάξης που έχουν επιλέξει ως δεύτερη ξένη γλώσσα τα Γαλλικά ή τα Γερμανικά, ως προς το φύλο.

α) Ποιο είναι το ποσοστό των αγοριών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά;

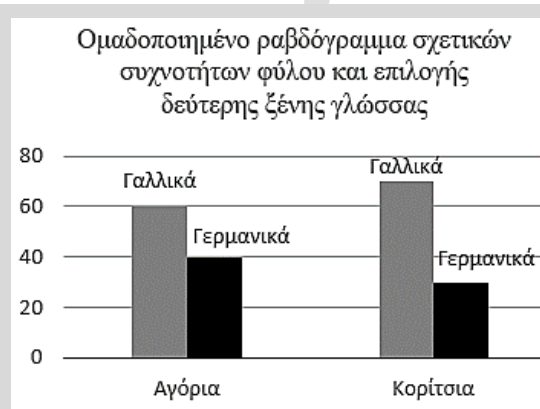
β) Ποιο είναι το ποσοστό των κοριτσιών που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά;

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Τα αγόρια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι λιγότερα από τα αγόρια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.

ii. Τα κορίτσια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι περισσότερα από τα κορίτσια της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.

iii. Τα παιδιά της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γαλλικά είναι περισσότερα από τα παιδιά της Α' τάξης που έχουν επιλέξει τα Γερμανικά.



Λύση

α) Το 60% των αγοριών έχει επιλέξει Γαλλικά.

β) Το 70% των κοριτσιών έχει επιλέξει Γαλλικά.

γ) i. Λ ii. Σ iii. Σ

36765. Σε ένα πορθμείο της Αττικής μετακινούνται μοτοσυκλέτες και αυτοκίνητα. Οι διελεύσεις οχημάτων της τελευταίας εβδομάδας καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα συνάφειας.

		Είδος οχήματος		
		Μοτοσυκλέτες	Αυτοκίνητα	Σύνολο
Λόγος μετακίνησης	Δουλειά	75%	45%	
	Ψυχαγωγία	25%	55%	
	Σύνολο	100%	100%	

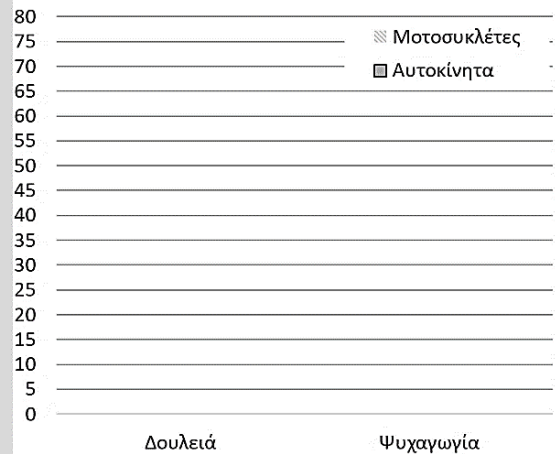
Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα συνάφειας:

α) Οι περισσότερες διελεύσεις με μοτοσυκλέτα έγιναν για δουλειά ή για ψυχαγωγία, την προηγούμενη εβδομάδα;

β) Τι ποσοστό των αυτοκινήτων που μετακινήθηκαν μέσω του πορθμείου είχαν ως λόγο μετακίνησης την ψυχαγωγία;

γ) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω

σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα, ως προς το είδος οχήματος χρησιμοποιώντας τα ποσοστά του παραπάνω πίνακα.

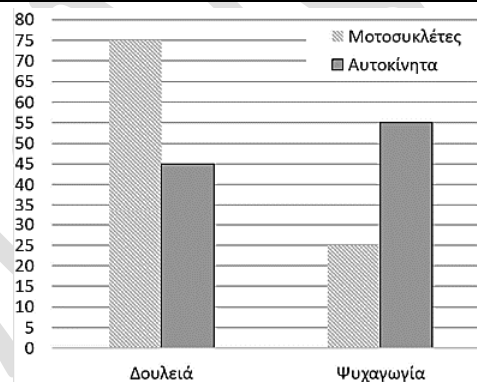


Λύση

α) Για Δουλειά με ποσοστό 75%.

β) Το 55% των αυτοκινήτων που μετακινήθηκαν μέσω του πορθμείου είχαν ως λόγο μετακίνησης την ψυχαγωγία.

γ)



36901. Μια εταιρεία λιανικής πώλησης αθλητικών ειδών κατέγραψε το περασμένο έτος τις πωλήσεις των προϊόντων της: παπούτσια, ρούχα, αξεσουάρ, ανά κατηγορία: ανδρικά, γυναικεία, παιδικά.

Τα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν με το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, κατηγορίας και προϊόντων ως προς το σύνολο των παρατηρήσεων του δείγματος.

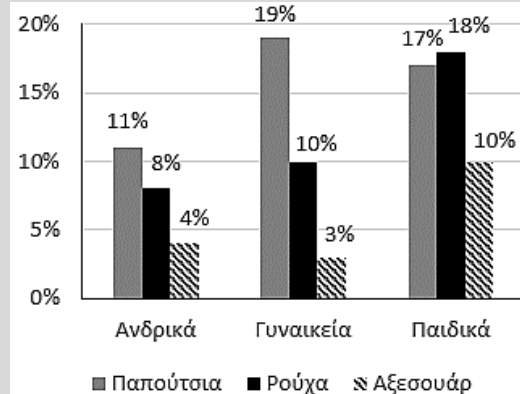
α) Από τα ανδρικά προϊόντα, σε ποιο καταγράφηκαν οι περισσότερες πωλήσεις;

β) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ανδρικών προϊόντων στο δείγμα;

γ) Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό των ρούχων στο δείγμα;

δ) Σε ποιο από τα προϊόντα (παπούτσια, ρούχα ή αξεσουάρ), καταγράφηκαν συνολικά οι λιγότερες πωλήσεις;

ε) Σε ποια κατηγορία (ανδρικά, γυναικεία ή παιδικά), καταγράφηκαν συνολικά οι περισσότερες πωλήσεις;



Λύση

α) Στα παπούτσια με ποσοστό 11%.

β) $11\% + 8\% + 4\% = 23\%$.

γ) $8\% + 10\% + 18\% = 36\%$.

δ) Στα αξεσουάρ με ποσοστό $4\% + 3\% + 10\% = 17\%$.

ε) Στα παιδικά με ποσοστό $17\% + 18\% + 10\% = 45\%$.

4ο Θέμα

32877. Το παρακάτω ιστόγραμμα δείχνει την κατανομή των ποσοστιαίων ετήσιων αποδόσεων, όλων των μετοχών που είναι εισηγμένες σε ένα Χρηματιστήριο.

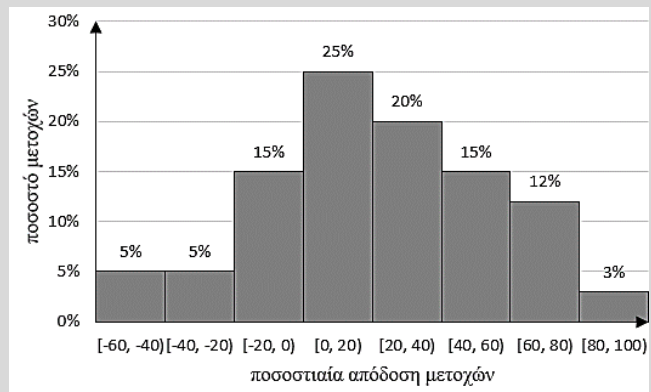
Για παράδειγμα, η απόδοση για μια μετοχή -20 σημαίνει μείωση της τιμής της κατά 20%, ενώ η απόδοση 20 σημαίνει αύξηση της τιμής της κατά 20%.

α) Μεταξύ ποιων τιμών είναι η μικρότερη ποσοστιαία ετήσια απόδοση και μεταξύ ποιων τιμών είναι η μεγαλύτερη;

β) Επιλέγουμε τυχαία μία μετοχή.

Να βρείτε τις πιθανότητες για αυτή τη μετοχή:

- i.** η τιμή της να αυξήθηκε, αλλά η ποσοστιαία αύξηση είναι μικρότερη από 20%,
- ii.** η τιμή της να μειώθηκε,
- iii.** η τιμή της να μεταβλήθηκε το πολύ κατά 20%.



Λύση

α) Στη κλάση $[80, 100)$.

β) i. Μικρότερη από 20% απόδοση είχαν όλες οι κλάσεις εκτός από τις $[0, 20)$ και $[20, 40)$, άρα το ποσοστό είναι $100\% - 25\% - 20\% = 55\%$ και η πιθανότητα είναι 0,55.

ii. Οι μετοχές που μείωσαν τη τιμή τους περιέχονται στις κλάσεις $[-60, -40)$, $[-40, -20)$ και $[-20, 0)$, άρα το ποσοστό τους είναι $5\% + 5\% + 15\% = 25\%$. Η πιθανότητα είναι 0,25.

iii. Το πολύ 20% μεταβλήθηκε η τιμή όλων των μετοχών εκτός αυτών της κλάσης $[0, 20)$, άρα το ποσοστό είναι $100\% - 25\% = 75\%$ με πιθανότητα 0,75.

35530. Θέλοντας να διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ φύλου (άνδρας, γυναίκα) και καπνίσματος (μη καπνιστής, καπνιστής) για άτομα ηλικίας ανω των 15 ετών, διεξήχθη πανελλαδική έρευνα και συλλέχθηκε ένα δείγμα 1000 ατόμων. Τα δεδομένα οργανώθηκαν στον παρακάτω πίνακα συνάφειας :

		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Φύλο	Ανδρες	260	160	
	Γυναίκες	280	300	
	Σύνολο			

α) Να συμπληρώσετε τα κενά κελιά του παραπάνω και να συμπληρώσετε στον παρακάτω πίνακα το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα των συχνοτήτων του πίνακα συνάφειας.

β) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων ως προς το φύλο και το αντίστοιχο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμά του.

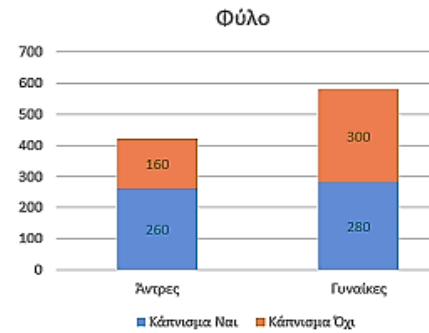
γ) Με βάση τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης έρευνας φαίνεται να υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ φύλου και καπνίσματος;



Λύση

35530. α)

Φύλο		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
	Ανδρες	260	160	420
	Γυναίκες	280	300	580
	Σύνολο	540	460	1000

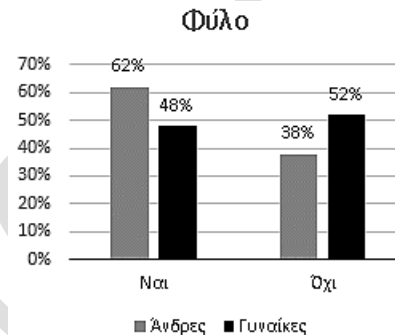


β) Οι άνδρες καπνιστές είναι 260 από τους 420, οπότε η σχετική τους συχνότητα είναι $\frac{260}{420} = \frac{13}{21} \approx 0,62$.

Οι Γυναίκες καπνίστριες είναι 280 από τις 580, οπότε η σχετική

τους συχνότητα είναι $\frac{280}{580} = \frac{14}{29} \approx 0,48$.

Φύλο		Κάπνισμα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
	Ανδρες	0,62	0,38	1
	Γυναίκες	0,48	0,52	1
	Σύνολο			



γ) Φαίνεται ότι στους άνδρες οι καπνιστές είναι πολλοί περισσότεροι από τους μη καπνίζοντες.

35688. Σ' έναν διαγωνισμό Στατιστικής, συμμετείχαν 5 αγόρια και 30 κορίτσια του 1^{ου} Λυκείου μιας πόλης και 15 αγόρια και 10 κορίτσια του 2^{ου} Λυκείου της πόλης. Ο αριθμός των επιτυχόντων και των επιτυχουσών του διαγωνισμού των δύο Λυκείων, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός επιτυχόντων και επιτυχουσών			
		Φύλο	
		Αγόρια	Κορίτσια
Σχολείο	1 ^ο Λύκειο	1	20
	2 ^ο Λύκειο	6	8

α) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 2^{ου} Λυκείου είναι:

i. 40% μεταξύ των αγοριών, ii. 80% μεταξύ των κοριτσιών.

β) Να αποδείξετε ότι τα ποσοστά επιτυχίας ανά φύλο, του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του 2^{ου} Λυκείου.

γ) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι, εφόσον τα ποσοστά επιτυχίας των αγοριών και των κοριτσιών του 1^{ου} Λυκείου είναι μικρότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά των αγοριών και των κοριτσιών του 2^{ου} Λυκείου, τότε και το συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 1^{ου} Λυκείου, θα είναι και αυτό μικρότερο από το αντίστοιχο συνολικό ποσοστό επιτυχίας του 2^{ου} Λυκείου. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Γιάννη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Τα 6 από τα 15 αγόρια του 2ου Λυκείου είχαν επιτυχία, οπότε το ποσοστό επιτυχίας τους είναι

$$\frac{6}{15} \cdot 100\% = 40\%.$$

ii. Τα 8 από τα 10 κορίτσια του 2ου Λυκείου που συμμετείχαν στο διαγωνισμό είχαν επιτυχία, οπότε το

ποσοστό τους είναι $\frac{8}{10} \cdot 100\% = 80\%$.

β) Στο 1ο Λύκειο 1 από τα 5 αγόρια που συμμετείχαν είχε επιτυχία, οπότε το ποσοστό είναι $\frac{1}{5} \cdot 100\% = 20\% < 40\%$.

Τα κορίτσια του 1ου Λυκείου που συμμετείχαν στον διαγωνισμό ήταν 30 και επιτυχία είχαν τα 20, οπότε το ποσοστό επιτυχίας τους ήταν $\frac{20}{30} \cdot 100\% \approx 67\% < 80\%$.

γ) Στο 1ο Λύκειο οι επιτυχόντες ήταν $1+20=21$ από τους $5+30=35$ μαθητές που συμμετείχαν, οπότε το ποσοστό επιτυχίας του 1ου Λυκείου είναι $\frac{21}{35} \cdot 100\% = 60\%$.

Στο 2ο Λύκειο οι επιτυχόντες ήταν $6+8=14$ από τους $15+10=25$ μαθητές που συμμετείχαν, οπότε το ποσοστό επιτυχίας του 2ου Λυκείου είναι $\frac{14}{25} \cdot 100\% = 56\%$. Ο Γιάννης είχε Λάθος.

36775. Σε δύο πόλεις, Α και Β έγινε έρευνα για το πρωινό ρόφημα που προτιμούν τα παιδιά ηλικίας από 5 έως 12 ετών. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στην παρακάτω εικόνα (στο επάνω μέρος) στο ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, επί τοις εκατό.

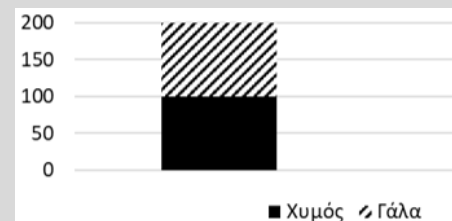
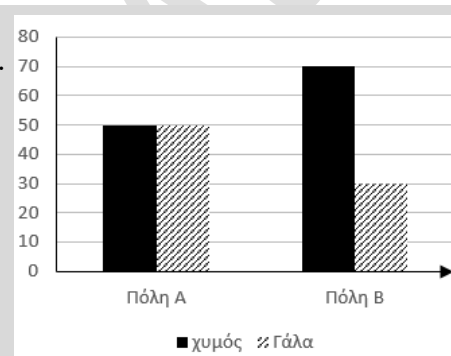
Στην εικόνα, στο κάτω μέρος φαίνεται μια από τις δύο ράβδους στοιβαγμένου ραβδογράμματος που αντιστοιχεί στα αποτελέσματα της ίδιας έρευνας.

α) Στην πόλη Α, ποιο ποσοστό των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα προτιμούν γάλα;

β) Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην προτίμηση των παιδιών 5-12 ετών σε χυμό ή γάλα και στην πόλη;

γ) Σε ποια πόλη αντιστοιχεί η ράβδος που φαίνεται στο στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και γιατί;

δ) Αν γνωρίζετε ότι συνολικά (στις δύο πόλεις) στην έρευνα απάντησαν 700 παιδιά 5-12 ετών, να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παραπάνω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα και να σχεδιάσετε τη ράβδο που λείπει.



Λύση

α) το 50%.

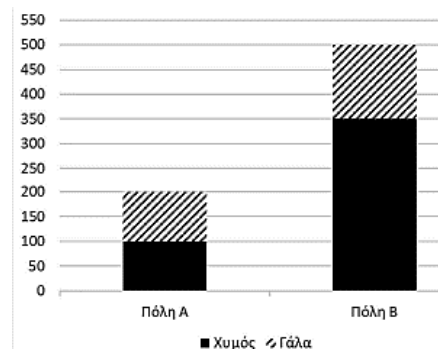
β) Στη πόλη Α οι προτιμήσεις των παιδιών είναι μοιρασμένες, ενώ στη πόλη Β η πλειψηφία των παιδιών προτιμούν τον χυμό.

γ) Στη πόλη Α γιατί εκεί το γάλα και ο χυμός έχουν το ίδιο ποσοστό.

δ) Επειδή στη πόλη Α συμμετείχαν 200 παιδιά, στη πόλη Β συμμετείχαν $700-200=500$ παιδιά. Τα παιδιά που προτιμούσαν

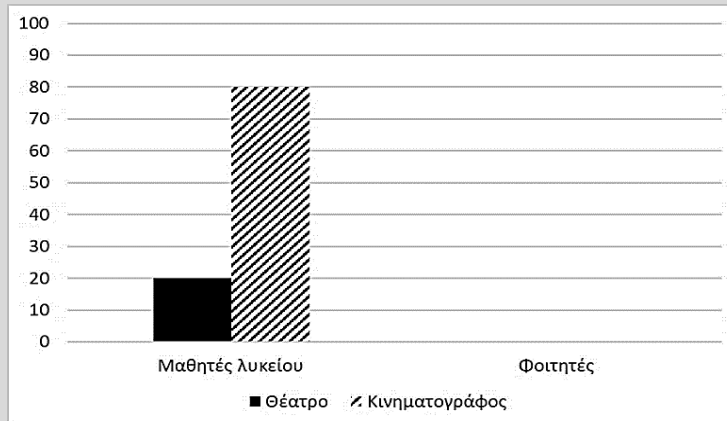
χυμό στη πόλη Β ήταν $\frac{70}{100} \cdot 500 = 350$ και τα υπόλοιπα 150

προτιμούσαν γάλα.



36776. Σε μια έρευνα μαθητές λυκείου και φοιτητές ερωτήθηκαν και απάντησαν αν προτιμούν κινηματογράφο ή θέατρο. Ένας ερευνητής, με τις απαντήσεις τους συμπλήρωσε μερικά κελιά του πίνακα συνάφειας συχνοτήτων και σχεδίασε το ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, ως προς τη βαθμίδα εκπαίδευσης που φαίνεται παρακάτω, αλλά δεν τελείωσε.

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	60		
	Φοιτητές	60	140	
	Σύνολο			



α) Ποιο ποσοστό των φοιτητών απάντησαν ότι προτιμούν θέατρο;

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε:

i. το παραπάνω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα,

ii. τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) την παρακάτω πρόταση, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

«Δεν παρατηρείται κάποια διαφορά μεταξύ μαθητών λυκείου και φοιτητών της έρευνας, όσο αφορά την απάντηση ‘θέατρο’, καθώς αυτή δόθηκε από τόσους φοιτητές όσους και μαθητές λυκείου (60).»

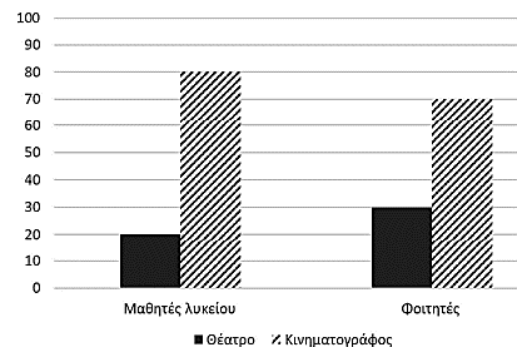
Λύση

α) Οι 60 από τους $60+140=200$ φοιτητές προτιμούν το Θέατρο, οπότε το ποσοστό τους είναι

$$\frac{60}{200} \cdot 100\% = 30\%.$$

β) i.

Τον κινηματογράφο προτιμά το $100\%-30\%=70\%$ των φοιτητών.



ii.

		Επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας		
		Θέατρο	Κινηματογράφος	Σύνολο
Βαθμίδα εκπαίδευσης	Μαθητές λυκείου	60	240	300
	Φοιτητές	60	140	200
	Σύνολο	120	380	500

Έστω x οι μαθητές Λυκείου, τότε $\frac{20}{100} \cdot x = 60 \Leftrightarrow \frac{x}{5} = 60 \Leftrightarrow x = 300$, δηλαδή 300 είναι οι μαθητές

Λυκείου, άρα τον κινηματογράφο προτιμούν $300 - 60 = 240$ μαθητές.

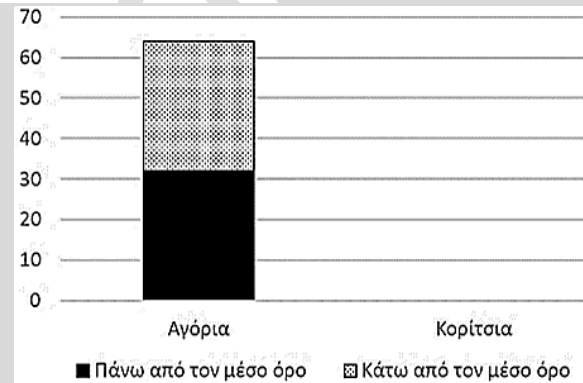
γ) Η πρόταση είναι λάθος γιατί το 20% των μαθητών προτιμούσε το θέατρο, ενώ στους φοιτητές το 30% προτιμούσε θέατρο.

36783. Τα παιδιά της Β' τάξης ενός γυμνασίου έγραψαν διαγώνισμα στα Μαθηματικά. Ο καθηγητής βαθμολόγησε τα διαγωνίσματα και υπολόγισε τον μέσο όρο όλων των βαθμών. Στον παρακάτω πίνακα συνάφειας καταγράφονται οι συχνότητες του φύλου των παιδιών που έγραψαν διαγώνισμα και του βαθμού στο διαγώνισμα, σε σύγκριση με τον μέσο όρο.

		Βαθμός στο διαγώνισμα		
		Πάνω από τον μέσο όρο	Κάτω από τον μέσο όρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	32	32	
	Κορίτσια	32	20	
	Σύνολο			

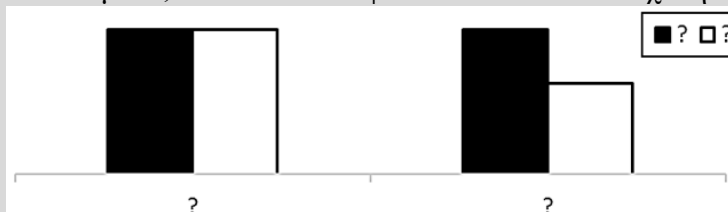
α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε το παρακάτω στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων φύλου και βαθμού, που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα.



γ) Δίνεται το παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων,

για τα παραπάνω δεδομένα, στο οποίο δεν φαίνεται πού αντιστοιχεί η κάθε ράβδος.



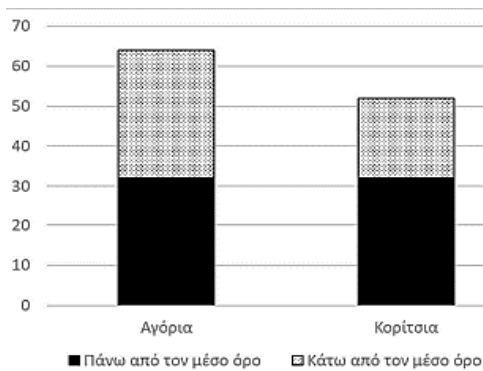
Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι σίγουρα οι άχρωμες ράβδοι αντιστοιχούν στην κατηγορία «βαθμός κάτω από τον μέσο όρο». Συμφωνείτε μαζί του;

Λύση

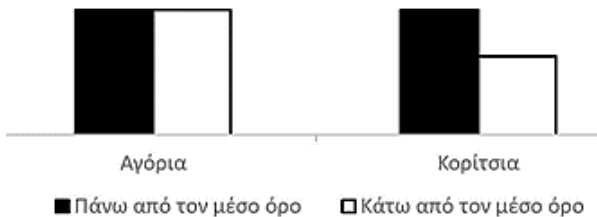
α)

		Βαθμός στο διαγώνισμα		
		Πάνω από τον μέσο όρο	Κάτω από τον μέσο όρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	32	32	64
	Κορίτσια	32	20	52
	Σύνολο	64	52	116

β)



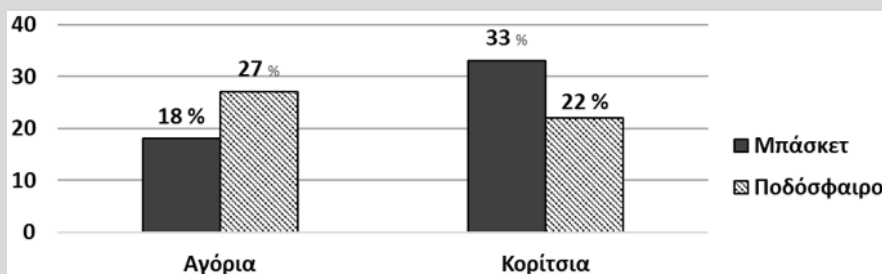
γ)



Τα αγόρια που είναι κάτω από τον μέσο όρο έχουν το ίδιο πλήθος με αυτά που βρίσκονται πάνω από το μέσο όρο, ενώ στα κορίτσια, αυτά που είναι πάνω από το μέσο όρο είναι περισσότερα, οπότε, οι δύο πρώτες ράβδοι αντιστοιχούν στα αγόρια και οι άλλες δύο στα κορίτσια. Οι μαύρες σε αυτούς που είναι πάνω από το μέσο όρο και οι λευκές σε αυτούς που είναι κάτω από το μέσο όρο.

Δεν συμφωνούμε με τον μαθητή γιατί θα μπορούσαν οι δύο πρώτες στήλες να αντιστοιχούν στους μαθητές που είναι πάνω από τον μέσο όρο, μια που τα αγόρια και τα κορίτσια έχουν το ίδιο πλήθος, ενώ οι δύο επόμενες στήλες μπορούν να αντιστοιχούν στους μαθητές κάτω από το μέσο όρο.

36784. Στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φαίνεται το ποσοστό των αγοριών και κοριτσιών της Γ' τάξης ενός γυμνασίου που επιλέγουν μπάσκετ ή ποδόσφαιρο.



Δίνεται ότι κάθε παιδί της Γ' τάξης επιλέγει ένα ακριβώς άθλημα.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων.

		Άθλημα		
		Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια			
	Κορίτσια			
	Σύνολο			

β) Ποιο ποσοστό των παιδιών του σχολείου επέλεξαν μπάσκετ;

γ) Αν τα αγόρια του σχολείου που επέλεξαν μπάσκετ είναι 36, πόσα είναι τα παιδιά που επέλεξαν ποδόσφαιρο;

δ) Χωρίς να γνωρίζετε το πλήθος των παιδιών του σχολείου, να αποδείξετε ότι τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι τα $\frac{2}{5}$ των αγοριών του σχολείου.

Λύση

α)

		Αθλημα		
		Μπάσκετ	Ποδόσφαιρο	Σύνολο
Φύλο	Αγόρια	18%	27%	45%
	Κορίτσια	33%	22%	55%
	Σύνολο	51%	49%	100%

β) Το 51% των παιδιών του σχολείου επέλεξαν μπάσκετ.

γ) Έστω x οι μαθητές του σχολείου, τότε $\frac{18}{100} \cdot x = 36 \Leftrightarrow 18x = 3600 \Leftrightarrow x = \frac{3600}{18} = 200$, δηλαδή το σχολείο είχε 200 μαθητές στη Γ' Τάξη.

Ποδόσφαιρο επέλεξαν τα $\frac{49}{100} \cdot 200 = 98$ παιδιά.

δ) Αν x οι μαθητές του σχολείου, τότε τα αγόρια που επέλεξαν μπάσκετ είναι $\frac{18}{100} \cdot x$ και συνολικά τα αγόρια είναι $\frac{45}{100} \cdot x$.

Τα $\frac{18}{100} \cdot x$ αγόρια από τα $\frac{45}{100} \cdot x$ είναι τα $\frac{\frac{18}{100} \cdot x}{\frac{45}{100} \cdot x} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$ των αγοριών.

36882. Ένα οπωροπωλείο προμηθεύεται το 60% των μήλων του από το Πήλιο και τα υπόλοιπα από την Καστοριά. Τα $\frac{4}{5}$ των μήλων που προμηθεύεται από το Πήλιο είναι κόκκινα και τα $\frac{3}{5}$

των μήλων που προμηθεύεται από την Καστοριά είναι επίσης κόκκινα.

α) Να αποδείξετε ότι, στο σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου:

i. το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από το Πήλιο είναι 48%,

ii. το ποσοστό εκείνων που είναι κόκκινα και προέρχονται από την Καστοριά είναι 24%.

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα συνάφειας σχετικών συχνοτήτων:

		Κόκκινα μήλα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Περιοχή	Καστοριά			
	Πήλιο			
	Σύνολο			

γ) Ένα μήλο επιλέγεται τυχαία από το σύνολο όλων των μήλων του οπωροπωλείου. Να βρείτε την πιθανότητα το μήλο αυτό «να έχει κόκκινο χρώμα ή να προέρχεται από την Καστοριά».

Λύση

α) i. Έστω x το σύνολο των μήλων.

Τα μήλα από το Πήλιο είναι $\frac{60}{100} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot x$.

Από αυτά, κόκκινα είναι τα $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot x = \frac{12}{25} x = \frac{48}{100} x$, άρα το 48% των μήλων.

ii. Τα μήλα που προέρχονται από τη Καστοριά είναι $\frac{40}{100} \cdot x = \frac{2}{5} \cdot x$.

Από αυτά, κόκκινα είναι τα $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot x = \frac{6}{25} x = \frac{24}{100} x$, άρα το 24% των μήλων.

β)

		Κόκκινα μήλα		
		Ναι	Όχι	Σύνολο
Περιοχή	Καστοριά	24%	16%	40%
	Πήλιο	48%	12%	60%
	Σύνολο	72%	28%	100%

γ) Έστω A το ενδεχόμενο το μήλο να είναι κόκκινο και B να είναι από την Καστοριά. Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{72}{100} + \frac{40}{100} - \frac{24}{100} = \frac{86}{100} = 0,86.$$

36907. Ο Δείκτης Μάζας Σώματος (ΔΜΣ) χρησιμοποιείται ως διαγνωστικό εργαλείο, πιθανών προβλημάτων υγείας ενός ατόμου σε σχέση με το βάρος του. Υπολογίζεται διαιρώντας το βάρος του ατόμου, σε κιλά, με το τετράγωνο του ύψους του, σε μέτρα. Σε μια έρευνα επιλέχθηκε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα 5000 ανδρών και 5000 γυναικών και καταγράφηκε ο ΔΜΣ αυτών των ατόμων.

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω ομαδοποιημένο ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων φύλου και κατηγορίας ΔΜΣ, ως προς το φύλο.

α) Σε ποια κατηγορία του ΔΜΣ παρατηρείται το μεγαλύτερο ποσοστό:

i. των ανδρών,

ii. των γυναικών;

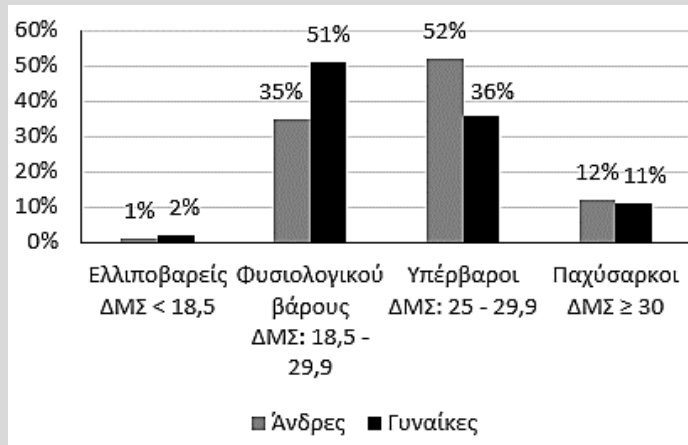
β) Ποιο είναι το ποσοστό με βάρος μη-φυσιολογικό:

i. των ανδρών,

ii. των γυναικών,

iii. όλων των ατόμων του δείγματος;

γ) Από την παραπάνω έρευνα, μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι η κατηγορία ΔΜΣ ενός ατόμου (ελλιποβαρές, φυσιολογικό, υπέρβαρο, παχύσαρκο) σχετίζεται με το φύλο του;



Λύση

α) i. 25-29,9 με ποσοστό 52%.

ii. 18,5-29,9 με ποσοστό 51%.

β) i. $100\% - 35\% = 65\%$ ii. $100\% - 51\% = 49\%$

iii. Μη φυσιολογικό βάρος έχουν $\frac{65}{100} \cdot 5000 = 3250$ άνδρες και

$\frac{49}{100} \cdot 5000 = 2450$ γυναίκες, άρα συνολικά 5700 άτομα από τα 10.000, και το ποσοστό τους είναι

$$\frac{5700}{10000} \cdot 100\% = 57\%$$

γ) δεν βγαίνουν ασφαλή συμπεράσματα μια που τα ποσοστά διαφέρουν ανά κατηγορία.

3ο Θέμα

36786. Ένα εστιατόριο κατέγραψε τις προτιμήσεις όλων των πελατών που το επισκέφτηκαν το τελευταίο Σαββατοκύριακο. Έτσι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας συνάφειας:

		Μενού προτίμησης		
		Χορτοφαγικό ό μενού	Συνηθισμένο ο μενού	Σύνολο
Ημέρα	Σάββατο	15		75
	Κυριακή	20		
	Σύνολο			180

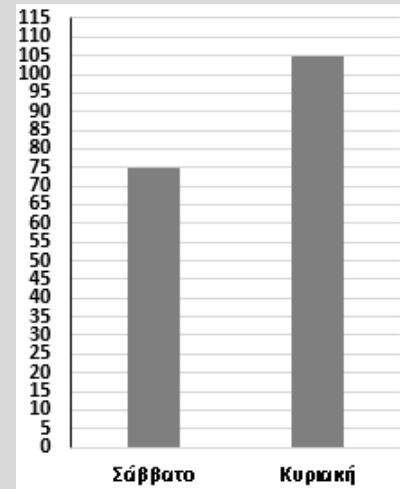
α) Σύμφωνα με τον πίνακα:

i. Πόσοι πελάτες προτίμησαν χορτοφαγικό ή συνηθισμένο μενού στο εστιατόριο την Κυριακή;

ii. Πόσοι πελάτες του εστιατορίου προτίμησαν συνηθισμένο μενού τις δύο ημέρες, συνολικά;

β) Γιατί το παρακάτω ραβδόγραμμα δεν είναι στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων που αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα συνάφειας;

γ) Να σχεδιάσετε το στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων ημέρας και μενού, δηλαδή το αντίστοιχο με το ερώτημα β), για τον παραπάνω πίνακα συνάφειας.

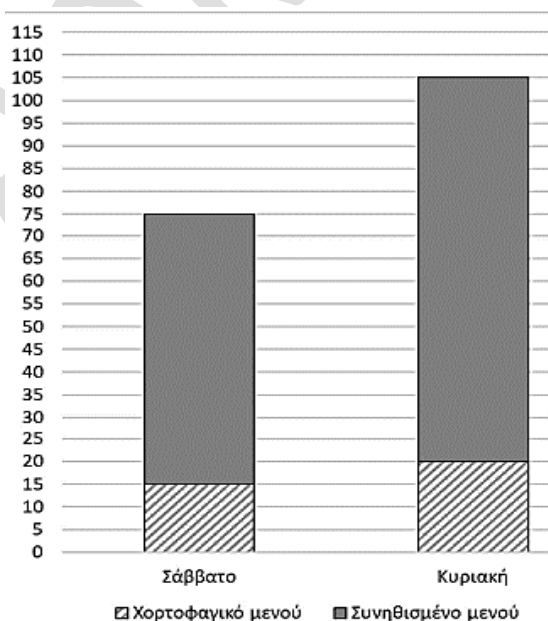


Λύση

α)i. Επειδή συνολικά ήταν 180 άτομα και από αυτά 75 το Σάββατο, την Κυριακή ήταν 105 άτομα.

ii. Την Κυριακή προτίμησαν 105 άτομα και από αυτά 20 προτίμησαν το χορτοφαγικό μενού, άρα 85 προτίμησαν το συνηθισμένο μενού.

β) Δεν είναι στοιβαγμένο ραβδόγραμμα συχνοτήτων, γιατί δεν παριστάνονται οι συχνότητες των πελατών που επέλεξαν κάθε μενού (χορτοφαγικό, συνηθισμένο), ανά ημέρα (Σάββατο, Κυριακή).



Μέτρα θέσης και διασποράς

2ο Θέμα

27314. Δίνεται η παρακάτω λίστα δεδομένων: 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 1

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2$,

ii. η διάμεσος είναι $\delta = 2$.

β) Να βρείτε:

i. τη διακύμανση,

ii. την τυπική απόκλιση,

iii. τον συντελεστή μεταβλητότητας.

Λύση

α) i. $\bar{x} = \frac{2+3+2+1+2+3+2+2+1}{9} = 2$

ii. Τα δεδομένα σε αύξουσα σειρά είναι: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3

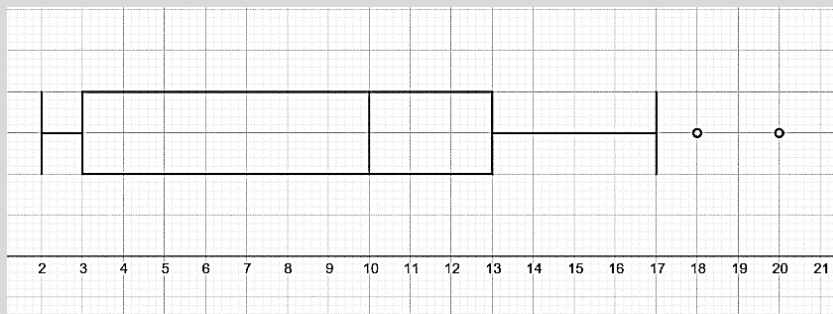
Επειδή οι παρατηρήσεις είναι 9, η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση, άρα $\delta = 2$.

β) i. $s^2 = \frac{1}{9} [2(1-2)^2 + 5(2-2)^2 + 2(3-2)^2] = \frac{4}{9}$

ii. $s = \sqrt{s^2} = \frac{2}{3}$

iii. $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{1}{3}$

29015. Το παρακάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τους πόντους ενός παίκτη μιας ομάδας καλαθοσφαίρισης στα 15 τελευταία παιχνίδια της ομάδας του.



Με τη βοήθεια του θηκογράμματος να βρείτε:

α) Το εύρος R των πόντων του παίκτη.

β) Τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_2 και Q_3 .

γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q.

δ) Τις ακραίες τιμές.

Λύση

α) Επειδή ο ελάχιστος αριθμός πόντων είναι 2 και ο μέγιστος 20, το εύρος είναι: $R = 20 - 2 = 18$

β) Από το θηκόγραμμα έχουμε ότι $Q_1 = 3$, $Q_2 = 10$ και $Q_3 = 13$.

γ) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q = Q_3 - Q_1 = 13 - 3 = 10$.

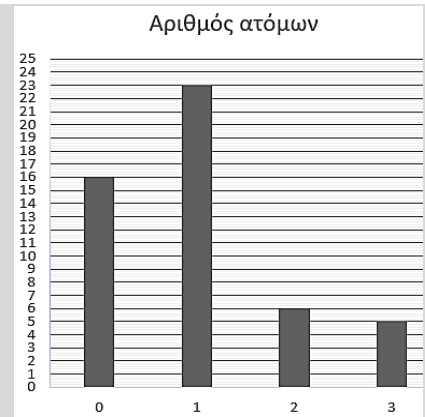
δ) Οι ακραίες τιμές είναι το 18 και το 20.

29912. Έγινε μια έρευνα σε ένα δείγμα ενηλίκων που αφορούσε τον αριθμό βιβλίων που διάβασαν κατά την διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών τους.

Τα ευρήματα παρουσιάζονται στο ακόλουθο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων που ακολουθεί.

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός ατόμων
Σύνολο	



β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή του αριθμού των βιβλίων, που διάβασαν κατά τη διάρκεια των διακοπών τους, τα άτομα που συμμετείχαν στην έρευνα.

Λύση

α)

$$\beta) \bar{x} = \frac{0 \cdot 16 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5}{50} = 1$$

Αριθμός βιβλίων	Αριθμός ατόμων
0	16
1	23
2	6
3	5
Σύνολο	50

29694. Ένας μαθητής στις γραπτές δοκιμασίες στο μάθημα των Μαθηματικών, κατά τη διάρκεια μιας χρονιάς, πήρε τις ακόλουθες βαθμολογίες : 10, 14, 9, 15, 14, 12, 18, 13, 13, 13

α) Να βρείτε τη διάμεσο και τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 .

β) Να βρείτε το εύρος της βαθμολογίας του καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q .

γ) Να σχεδιάσετε το θηκόγραμμα.

Λύση

α) Σε αύξουσα σειρά οι βαθμοί είναι 9, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 18

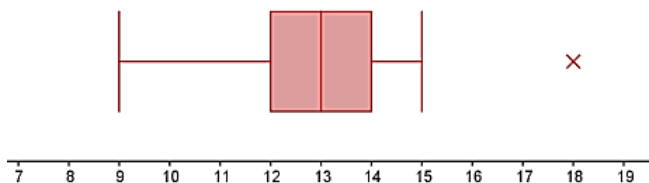
Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, δηλαδή $\delta = \frac{13+13}{2} = 13$.

Στο πρώτο μισό 9, 10, 12, 13, 13 η διάμεσός του είναι το πρώτο τεταρτημόριο $Q_1 = 12$, καθώς και στο δεύτερο μισό 13, 14, 14, 15, 18 η διάμεσός του είναι το τρίτο τεταρτημόριο $Q_3 = 14$.

β) Το εύρος είναι $R = x_{\max} - x_{\min} = 18 - 9 = 9$.

Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 14 - 12 = 2$.

γ) Στο διάστημα $[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [12 - 1,5 \cdot 2, 14 + 1,5 \cdot 2] = [12 - 3, 14 + 3] = [9, 17]$, περιλαμβάνονται όλες οι παρατηρήσεις εκτός από το 18, επομένως το 18 είναι ακραία τιμή.



30224. Οι βαθμοί μιας μαθήτριας της Γ' λυκείου στα διαγωνίσματα των μαθηματικών κατά τη διάρκεια του έτους ήταν : 12, 14, 15, 16, 20, 17, 12, 14.

- α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή των βαθμών της.
 β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των βαθμών της.
 γ) Να δειχτεί ότι η διακύμανση είναι ίση με $\frac{25}{4}$.
 δ) Να υπολογιστεί ο συντελεστής μεταβλητότητας.

Λύση

$$\alpha) \bar{x} = \frac{12+14+15+16+20+17+12+14}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

β) Οι βαθμολογίες σε αύξουσα σειρά είναι οι : 12, 12, 14, 14, 15, 16, 17, 20.

$$\delta = \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{14+15}{2} = 14,5$$

$$\gamma) s^2 = \frac{2(12-15)^2 + 2(14-15)^2 + (15-15)^2 + (16-15)^2 + (17-15)^2 + (20-15)^2}{8} = \frac{25}{4} \quad \delta)$$

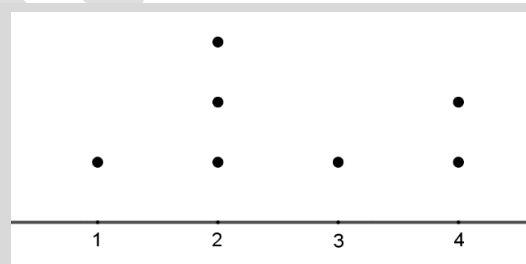
$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{\frac{25}{4}}}{15} = \frac{\frac{5}{2}}{15} = \frac{1}{6} \cong 0,17$$

31507. Στο επόμενο σημειόγραμμα φαίνονται τα γκολ που σημείωσε η εθνική ομάδα της Αργεντινής στο Μουντιάλ του Κατάρ το 2022 στα επτά συνολικά παιχνίδια που χρειάστηκε να αγωνισθεί μέχρι να κατακτήσει το παγκόσμιο κύπελλο.

α) Με βάση το σημειόγραμμα να καταγράψετε τον αριθμό των γκολ σε κάθε αγώνα.

β) Να υπολογίσετε για τα γκολ που σημείωσε η ομάδα στα 7 αυτά παιχνίδια:

- i. Τη μέση τιμή.
 ii. Το εύρος.
 iii. Την επικρατούσα τιμή.
 iv. Την διάμεσο.



Λύση

α)

$$\beta) i. \bar{x} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2}{7} = \frac{18}{7} \cong 2,57$$

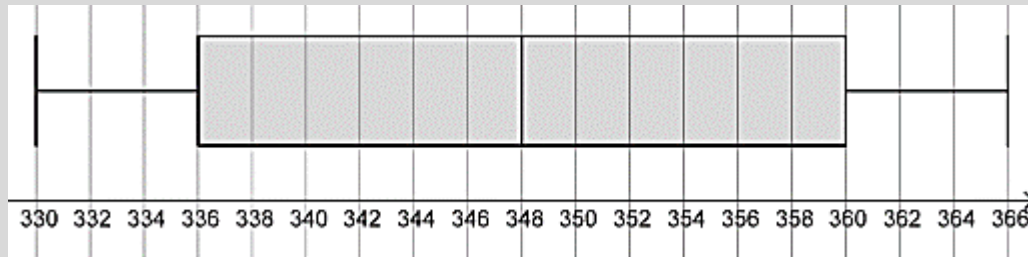
$$ii. R = x_{\max} - x_{\min} = 4 - 1 = 3$$

$$iii. M_0 = 2$$

$$iv. \delta = \frac{x_3 + x_4}{2} = 2$$

αριθμός γκολ x _i	συχνότητα v _i
1	1
2	3
3	1
4	2
Σύνολο	7

32214. Η Χριστίνα πηγαίνει για τρέξιμο τουλάχιστον 5 φορές την εβδομάδα. Τις τελευταίες τέσσερις εβδομάδες μετρούσε κάθε φορά σε πόσα δευτερόλεπτα έτρεχε 1 χιλιόμετρο. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στις μετρήσεις της Χριστίνας.



- α)** Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε:
- το εύρος R των μετρήσεων,
 - τη διάμεσο δ των μετρήσεων,
 - το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο των μετρήσεων, Q_1 και Q_3 αντίστοιχα,
 - το ενδοτεταρτημοριακό εύρος Q των μετρήσεων.
- β)** Ποιος είναι ο καλύτερος (μικρότερος) χρόνος που έκανε η Χριστίνα;

Λύση

- α) i.** $R = x_{\max} - x_{\min} = 366 - 330 = 36$ δευτερόλεπτα.
- ii.** $\delta = 348$
- iii.** $Q_1 = 336$, $Q_3 = 360$ δευτερόλεπτα.
- iii.** $Q = Q_3 - Q_1 = 24$.

- β)** το 330 δευτερόλεπτα

36471. Το παρακάτω κυκλικό διάγραμμα παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας έρευνας, σχετικά με τον τρόπο πληρωμής των πελατών σ' ένα εστιατόριο, έναν συγκεκριμένο μήνα.

- α)** Ποια είναι η μεταβλητή που εξετάζεται στην έρευνα;
- β)** Ποιο είναι το είδος της μεταβλητής;
- γ)** Ποιες είναι οι τιμές της μεταβλητής;
- δ)** Ποιες είναι οι σχετικές συχνότητες % των τιμών της μεταβλητής;
- ε)** Ποια είναι η επικρατούσα τιμή;



Λύση

- α)** Η μεταβλητή είναι ο τρόπος πληρωμής των πελατών σ' ένα εστιατόριο, έναν συγκεκριμένο μήνα.

- β)** Είναι ποιοτική μεταβλητή.

- γ)** Οι τιμές της μεταβλητής «Τρόπος πληρωμής» είναι: Πιστωτική κάρτα, Χρεωστική κάρτα, Ψηφιακό πορτοφόλι, Μετρητά, Άλλος τρόπος.

- δ)** Πιστωτική κάρτα 25%, Χρεωστική κάρτα 35%, Ψηφιακό πορτοφόλι 10%, Μετρητά 20%, Άλλος τρόπος 10%.

- ε)** Επικρατούσα τιμή είναι εκείνη με τη μεγαλύτερη συχνότητα, που είναι η «Χρεωστική κάρτα» αφού έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

36761.Κάναμε μια έρευνα με στόχο να μελετηθούν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των ατόμων με ηλικίες 10 έως 19 ετών, μιας περιφέρειας της Ελλάδας, τα οποία ήταν 57.579, συνολικά. Τα χαρακτηριστικά που μελετήθηκαν ήταν:

- το ύψος τους, σε εκατοστά,
- η ηλικία τους, σε έτη,
- η αγαπημένη τους αθλητική δραστηριότητα,
- η ημέρα γέννησής τους (Δευτέρα, Τρίτη, κτλ.).

Επιλέξαμε, αντιπροσωπευτικά, 1.000 άτομα από αυτά και υπολογίσαμε τη μέση τιμή της ηλικίας τους, σε έτη, η οποία ήταν 16,5 και τη μέση τιμή του ύψους τους, σε εκατοστά, η οποία ήταν 155.

α) Ποιο είναι το μέγεθος του πληθυσμού της έρευνας και ποιο του δείγματος που επιλέξαμε;

β) Ποια από τα χαρακτηριστικά που μελέτησε η έρευνα ήταν ποσοτικά και ποια ποιοτικά;

γ) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η μέση τιμή της ηλικίας, σε έτη, των ατόμων του δείγματος ήταν 16,5.

ii. Η μέση τιμή της ηλικίας, σε έτη, όλων των κατοίκων της περιφέρειας ήταν 16,5.

iii. Η μέση τιμή και η διάμεσος της ηλικίας, σε έτη, των ατόμων του δείγματος ήταν 16,5.

iv. Έχουμε ενδείξεις ότι η μέση τιμή του ύψους, σε εκατοστά, όλων των ατόμων της περιφέρειας με ηλικίες, σε έτη, 10 έως 19 ήταν 155 περίπου.

Λύση

α) Το μέγεθος του πληθυσμού ήταν 57.579 και το δείγμα που επιλέξαμε ήταν 1.000.

β) Ποιοτικά ήταν : η αγαπημένη τους αθλητική δραστηριότητα και η ημέρα γέννησής τους. Ποσοτικά ήταν : Το ύψος, σε εκατοστά και ηλικία σε έτη.

γ) i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Σ

36764.Δίνονται τα παρακάτω σύνολα παρατηρήσεων:

A: 4, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6

B: 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6

α) Για το σύνολο A, να υπολογίσετε:

i. το εύρος,

ii. τη μέση τιμή $\bar{x}$,

iii. τη διάμεσο δ.

β) Να συγκρίνετε τα σύνολα A και B, ως προς το εύρος και τη μέση τιμή.

Λύση

α)i. $R_A = 11 - 2 = 9$

ii. $\bar{x}_A = \frac{4+6+4+5+7+2+4+8+11+6}{10} = 5,7$

iii. Τοποθετούμε σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις:

2, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 11 και η διάμεσος είναι $\delta = \frac{5+6}{2} = 5,5$.

β) $R_B = 6 - 5 = 1 < R_A$

$\bar{x}_B = \frac{5+5+5+6+6+6+6+6+6+6}{10} = 5,7 = \bar{x}_A$

4ο Θέμα

27339. Ένας δρομέας μεγάλων αποστάσεων, κατέγραψε τα χιλιόμετρα που έτρεξε σε καθεμία από τις 20 ημέρες προπόνησης ενός μήνα και σχημάτισε τον παρακάτω πίνακα:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	20
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

α) Να βρείτε:

i. τη μέση τιμή,

ii. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες τιμές.

γ) Ο δρομέας τον επόμενο μήνα διατήρησε το ίδιο πρόγραμμα προπόνησης, εκτός από την μέγιστη απόσταση την οποία αύξησε σε 28 χιλιόμετρα όπως φαίνεται παρακάτω:

απόσταση σε χιλιόμετρα	5	7	10	15	28
αριθμός ημερών	4	5	5	5	1

Ποια από τα μέτρα θέσης του α) ερωτήματος μεταβάλλονται και ποια όχι; Θα υπάρχουν τώρα ακραίες τιμές;

Λύση

$$\alpha) \text{ i. } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i v_i}{v} = \frac{5 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 15 \cdot 5 + 20 \cdot 1}{4 + 5 + 5 + 5 + 1} = \frac{200}{20} = 10$$

ii. Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, **10, 10**, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15, 15, 15, 20

x_{10} x_{11}

$$\delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10$$

Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι ο μέσος όρος της 5ης και της 6ης παρατήρησης, άρα

$$Q_1 = \frac{7 + 7}{2} = 7. \text{ Το τρίτο τεταρτημόριο } Q_3 \text{ είναι ο μέσος όρος της 15ης και 16ης παρατήρησης, άρα}$$

$$Q_3 = \frac{15 + 15}{2} = 15.$$

β) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 7 = 8$ χιλιόμετρα.

$$\text{Είναι } [Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [7 - 1,5 \cdot 8, 15 + 1,5 \cdot 8] = [-5, 27]$$

Επειδή στο διάστημα $[-5, 27]$ περιέχονται όλες οι παρατηρήσεις, δεν υπάρχουν ακραίες τιμές.

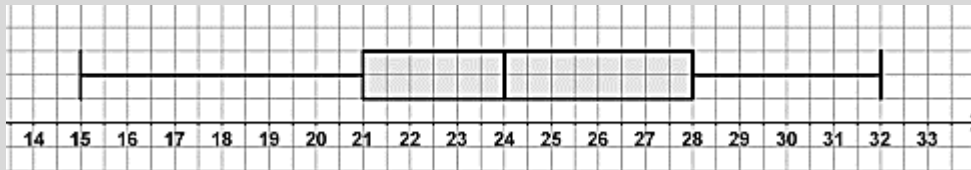
γ) Η μέγιστη ημερήσια απόσταση από 20 χιλιόμετρα που ήταν, έγινε 28 χιλιόμετρα.

Οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά είναι τώρα:

5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, **10, 10**, 10, 10, 10, **15, 15**, 15, 15, 15, 15, 28

Η διάμεσος, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο καθώς και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος δεν μεταβάλλονται, όμως τώρα το 28 είναι ακραία τιμή.

32217. Ο Κώστας εργάζεται στο τηλεφωνικό κέντρο εταιρείας πληροφορικής εξυπηρετώντας τηλεφωνικά τους πελάτες. Το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στους πελάτες ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε 20 ημέρες.



- α) Ποιος ήταν ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών ανά ημέρα που εξυπηρέτησε ο Κώστας αυτές τις 20 ημέρες;
 β) Χρησιμοποιώντας το θηκόγραμμα, να βρείτε τα τεταρτημόρια Q_1 , Q_3 και τη διάμεσο δ .
 γ) Ο Κώστας θέλει να καταγράψει τις 10 πιο «απασχολημένες» ημέρες του με κριτήριο τον αριθμό των πελατών που εξυπηρέτησε κάθε ημέρα.
 Μια ημέρα εξυπηρέτησε 23 πελάτες και μια άλλη ημέρα εξυπηρέτησε 25 πελάτες. Ποια ή ποιες από αυτές τις δύο ημέρες ανήκουν στις 10 πιο απασχολημένες του;

Λύση

- α) Ο μεγαλύτερος αριθμός πελατών που εξυπηρέτησε ο Κώστας σε μία ημέρα είναι 32 και ο μικρότερος ήταν 15.
 β) Είναι $Q_1=21$, $Q_3=28$ και $\delta = 24$.
 γ) Επειδή οι παρατηρήσεις ήταν 20, η διάμεσος που είναι το 24 είναι το 50% των παρατηρήσεων. Άρα μέχρι το 24 είναι 10 παρατηρήσεις και άλλες 10 είναι από το 24 και μετά. Επομένως το 25 ανήκει στις 10 πιο απασχολημένες ημέρες.

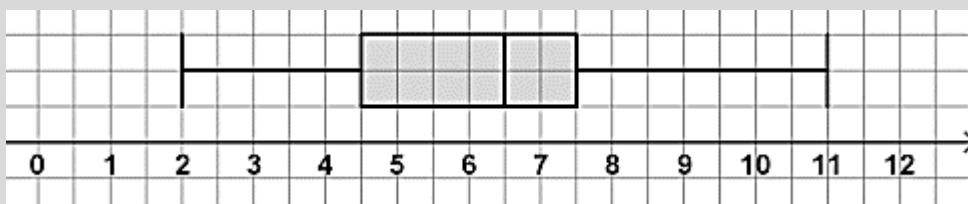
32218. Δίνονται οι παρακάτω είκοσι παρατηρήσεις:

4, 5, 6, 4, 5, 7, 2, 4, 8, 11, 6, 7, 7, 4, 5, 7, 6, 10, 9, 9

α) Να υπολογίσετε:

- i. την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή,
 ii. τη διάμεσο δ ,
 iii. τα τεταρτημόρια Q_1 και Q_3 .

β) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι το παρακάτω θηκόγραμμα αντιστοιχεί στα παραπάνω δεδομένα. Ωστόσο έχει ένα λάθος. Μπορείτε να το εντοπίσετε;



γ) Να κάνετε αλλαγή σε μία μόνο από τις παραπάνω παρατηρήσεις, έτσι ώστε στο νέο σύνολο είκοσι παρατηρήσεων που θα προκύψει, να αντιστοιχεί το θηκόγραμμα του β) ερωτήματος.

Λύση

- α) i. $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 11$.
 ii. Γράφουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά: 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11.
 Είναι $\delta = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6$.
 iii. $Q_1 = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{4 + 5}{2} = 4,5$, $Q_3 = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5$.
 β) Στο θηκόγραμμα φαίνεται ότι η διάμεσος είναι το 6,5 και όχι το 6.

γ) Αντικαθιστούμε ένα από τα 6 με 7. Τότε έχουμε: 2, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 9, 10, 11
Το νέο δείγμα έχει τα ίδια $x_{\min}$, $x_{\max}$, Q_1 και Q_3 και $\delta = 6,5$.

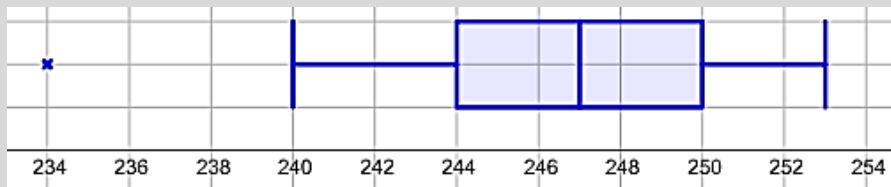
32893. Μια εταιρεία τροφίμων χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει βρώσιμες ελιές σε δοχεία 250 γραμμαρίων (αναγραφόμενη ετικέτα). Παρακάτω δίνεται το καθαρό βάρος από ένα τυχαίο δείγμα 15 τέτοιων δοχείων.

245	250	247	250	245	250	250	245
249	245	242	247	250	245	245	

α) Για το παραπάνω δείγμα:

- Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή.
- Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.
- Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

β) Μια μικρή οικογενειακή επιχείρηση συσκευάζει το ίδιο προϊόν σε δοχεία 250 γραμμαρίων, με το χέρι. Επιλέχθηκε τυχαίο δείγμα 15 δοχείων και το καθαρό βάρος των δοχείων αυτών, παριστάνεται με το παρακάτω θηκόγραμμα. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.



γ) Συγκρίνοντας τις απαντήσεις σας, στα ερωτήματα α) και β), ποιος πιστεύετε ότι είναι ο πιο ακριβής τρόπος πλήρωσης των δοχείων, με αυτόματο μηχάνημα ή με το χέρι;

Λύση

α) i. Μέγιστη τιμή είναι το 250 και ελάχιστη το 242.

ii. Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

242, 245, 245, 245, 245, 245, 245, 247, 247, 249, 250, 250, 250, 250, 250

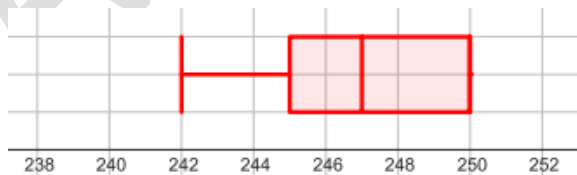
Είναι $\delta = x_8 = 247$.

Επειδή το πλήθος των διατεταγμένων παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, αφαιρούμε από το δείγμα τη διάμεσο και διακρίνουμε το πρώτο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_1 και το δεύτερο μισό, του οποίου η διάμεσος είναι το Q_3 , όπως φαίνεται παραπάνω. Επομένως $Q_1 = 245$ και $Q_3 = 250$.

iii. $Q = Q_3 - Q_1 = 250 - 245 = 5$.

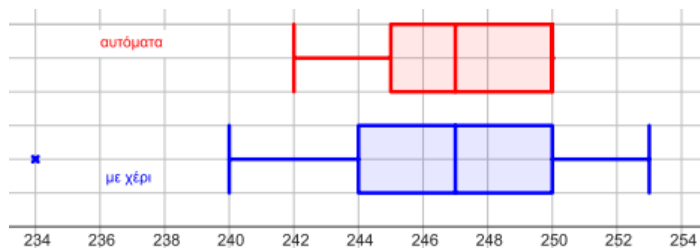
Είναι $[Q_1 - 1,5Q, Q_3 + 1,5Q] = [237,5, 257,5]$.

Παρατηρούμε ότι δεν βρίσκονται παρατηρήσεις εκτός του διαστήματος $[237,5, 257,5]$, άρα δεν υπάρχουν ακραίες τιμές. Το θηκόγραμμα είναι:



β) Μέγιστη τιμή το 253, ελάχιστη το 234, διάμεσος το 247, $Q'_1 = 244$, $Q'_3 = 250$.

γ)

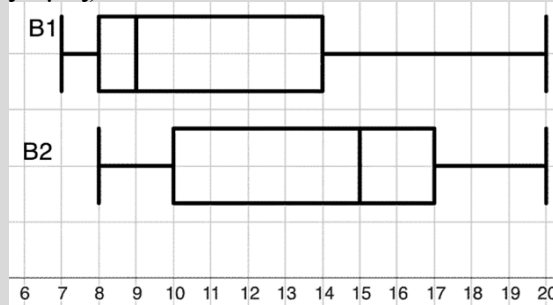


Τα δύο θηκογράμματα έχουν την ίδια διάμεσο και το ίδιο Q_3 .

Έχουν διαφορετικό εύρος και ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο τρόπος πλήρωσης των δοχείων, είναι πιο ακριβής με αυτόματο μηχανήμα παρά με το χέρι.

34160. Τα τμήματα B1 και B2 ενός σχολείου έγραψαν ένα διαγώνισμα στα μαθηματικά, με τα ίδια θέματα. Στα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζονται οι βαθμοί των μαθητών (σε κανένα τμήμα δεν έχουμε ακραίες τιμές).



α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα με βάση τα δύο θηκογράμματα.

β) Να υπολογίσετε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος καθώς και το εύρος των βαθμών των δύο τμημάτων, στο διαγώνισμα.

γ) Ο καθηγητής αποφάσισε να δώσει ένα βραβείο στο 25% των μαθητών του κάθε τμήματος, οι οποίοι πήραν τη μεγαλύτερη βαθμολογία. Ο Δημήτρης πήρε 16 στο διαγώνισμα και πήρε βραβείο. Σε ποιο από τα δύο τμήματα είναι ο Δημήτρης;

	Τμήμα B1	Τμήμα B2
Q_1		
δ		
Q_3		
$x_{\min}$		
$x_{\max}$		

Λύση

α)

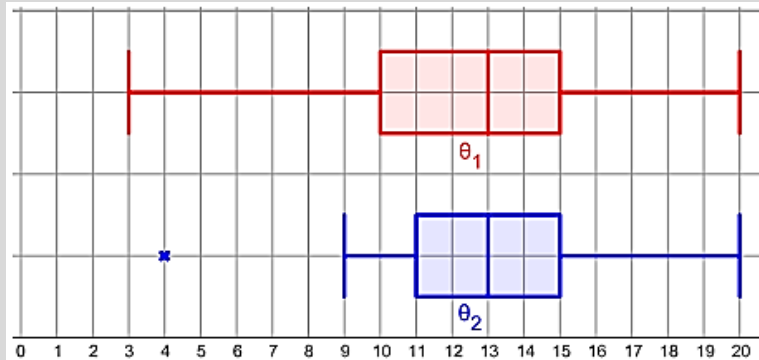
	Τμήμα B1	Τμήμα B2
Q_1	8	10
δ	9	15
Q_3	14	17
$x_{\min}$	7	8
$x_{\max}$	20	20

β) Για το B1: $Q = Q_3 - Q_1 = 14 - 8 = 6$ και εύρος: $R = 20 - 7 = 13$.

Για το B2: $Q = Q_3 - Q_1 = 17 - 10 = 7$ και εύρος: $R = 20 - 8 = 12$.

γ) Επειδή στο Q_3 αντιστοιχεί το 75% των βαθμών, το 25% που βραβευθήκαν ήταν μετά το Q_3 στο θηκόγραμμα. Στο B2, το Q_3 17, οπότε το 16 του Δημήτρη δεν βρίσκεται στο 25% των καλύτερων βαθμών, ενώ στο B1 είναι $Q_3 = 14$. Άρα ο Δημήτρης είναι στο B1.

34605. Η Μαρία και οι συμμαθητές της συμμετείχαν σε έναν διαγωνισμό στη Στατιστική. Η βαθμολογία της Μαρίας αρχικά καταχωρήθηκε ως 3 πριν διορθωθεί με τη σωστή βαθμολογία που ήταν 13. Τα παρακάτω θηκογράμματα θ_1 και θ_2 παρουσιάζουν τις βαθμολογίες των παιδιών, πριν και μετά τη διόρθωση στη βαθμολογία της Μαρίας.



α) Ποια από τα δύο θηκογράμματα θ_1 και θ_2 :

i. έχει ακραία τιμή;

ii. περιέχει τη σωστή βαθμολογία της Μαρίας;

β) Να συγκρίνετε τις δύο βαθμολογίες, πριν και μετά τη διόρθωση, ως προς:

i. τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο,

ii. το εύρος και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος,

iii. τη μέση τιμή.

Λύση

α) i. Ακραία τιμή έχει το θ_2 τη 4.

ii. Τη σωστή βαθμολογία περιέχει το θ_2 , αφού σ' αυτό δεν περιλαμβάνεται η λανθασμένη παρατήρηση 3.

β) i. Η διάμεσος και στα δύο θηκογράμματα είναι $\delta = 13$.

ii. Το πρώτο τεταρτημόριο στο θ_1 είναι $Q_1 = 10$ και στο θ_2 είναι $Q'_1 = 11$. Επομένως $Q_1 < Q'_1$. Το τρίτο τεταρτημόριο είναι το ίδιο, $Q_3 = Q'_3 = 15$ και στις δύο βαθμολογίες.

Στο θ_1 το εύρος είναι $R_1 = 20 - 3 = 17$ και στο θ_2 είναι $R_2 = 20 - 4 = 16$, δηλαδή $R_1 > R_2$.

Το θ_1 έχει ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q = Q_3 - Q_1 = 15 - 10 = 5$.

Το θ_2 έχει ενδοτεταρτημοριακό εύρος $Q' = Q'_3 - Q'_1 = 15 - 11 = 4$, άρα $Q > Q'$.

iii. Η μέση τιμή της διορθωμένης βαθμολογίας, είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή της λανθασμένης, αφού η παρατήρηση 3 αντικαταστάθηκε με την μεγαλύτερη παρατήρηση 13.

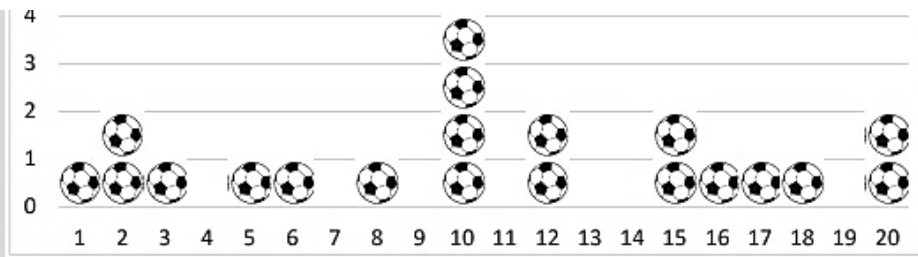
36881. Ο Λευτέρης αγωνίζεται σε μία ομάδα ποδοσφαίρου. Κατά τη διάρκεια του τελευταίου πρωταθλήματος η ομάδα του έδωσε 20 αγώνες, στους οποίους ο Λευτέρης σε έναν αγώνα δεν πέτυχε γκολ, σε έναν αγώνα πέτυχε 2 γκολ και στους υπόλοιπους δεκαοχτώ αγώνες πέτυχε 1 γκολ στον καθένα από αυτούς.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. ο Λευτέρης πέτυχε κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα,

ii. η τυπική απόκλιση των γκολ που πέτυχε ο Λευτέρης είναι $\sqrt{0,1}$.

β) Το παρακάτω εικονόγραμμα παρουσιάζει τον αριθμό των γκολ που πέτυχε ο Παύλος, σε κάθε αγώνα, κατά τη διάρκεια του ίδιου πρωταθλήματος. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο των γκολ ανά αγώνα, που πέτυχε ο Παύλος, καθώς και την τυπική απόκλιση των γκολ.



γ) Ο προπονητής μιας ποδοσφαιρικής ομάδας ενδιαφέρεται για την απόκτηση ενός ποδοσφαιριστή που θα βοηθήσει την ομάδα στο σκοράρισμα στο νέο πρωτάθλημα. Έχει να διαλέξει ανάμεσα στον Λευτέρη και στον Παύλο. Αν τα κριτήρια είναι η συχνότητα και η σταθερότητα στο σκοράρισμα, ποιον θα του προτείνατε με βάση τα παραπάνω δεδομένα;

Λύση

α) i. $\bar{x} = \frac{0 + 2 + 18 \cdot 1}{20} = 1.$

ii. $s^2 = \frac{(0-1)^2 + (2-1)^2 + 18 \cdot (1-1)^2}{20} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 \Leftrightarrow s = \sqrt{0,1}.$

β) $\bar{x}_{\Pi} = \frac{1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 2}{20} = 1,$

$s^2 = \frac{7 \cdot (0-1)^2 + 4 \cdot (2-1)^2 + 7 \cdot (1-1)^2 + (4-1)^2}{20} = \frac{20}{20} = 1 \Leftrightarrow s = 1$

γ) Και οι δύο ποδοσφαιριστές, πέτυχαν κατά μέσο όρο 1 γκολ ανά αγώνα ο καθένας, όμως ο Δημήτρης έχει μικρότερη τυπική απόκλιση, οπότε είναι πιο σταθερός στο σκοράρισμα. Ο Παύλος επιπλέον έχει και διαστήματα αγώνων που δεν πετυχαίνει γκολ, οπότε προτείνεται ο Δημήτρης.

36785. Ο υπεύθυνος καθηγητής του Γ4 συνέλεξε τις απουσίες των 24 μαθητών και μαθητριών του τμήματος, για την Δευτέρα και την Τρίτη της προηγούμενης εβδομάδας και τις καταχώρισε σε ένα ειδικό πρόγραμμα καταμέτρησης απουσιών, με το οποίο υπολόγισε ότι:

- η διάμεσος των απουσιών ήταν $\delta = 2,5$,
- το πρώτο τεταρτημόριο ήταν $Q_1 = 1$,
- το τρίτο τεταρτημόριο ήταν $Q_3 = 4$,
- η ελάχιστη τιμή των απουσιών ήταν $x_{\min} = 0$ και η μέγιστη τιμή $x_{\max} = 14$.

α) Υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έκανε τόσες απουσίες, όση είναι η διάμεσος δ ;

β) Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. Δεν υπάρχει μαθητής ή μαθήτρια του Γ4 που να έχει περισσότερες από 10 απουσίες.

ii. Το πολύ το 25% των μαθητών και μαθητριών του Γ4, δηλαδή το πολύ 6 μαθητές και μαθήτριες πήραν περισσότερες από 4 απουσίες τις δύο αυτές ημέρες.

iii. Υπάρχουν 6 μαθητές και μαθήτριες του Γ4 που δεν έχουν κάνει απουσία τις δύο αυτές ημέρες.

Λύση

α) Δεν μπορεί κάποιος μαθητής να έκανε 2,5 απουσίες.

β) i. Λ ii. Σ iii. Λ

Κανονική κατανομή

2ο Θέμα

36472. Υποθέτουμε ότι η διάρκεια της ανθρώπινης κύησης, σε ημέρες, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 266 και τυπική απόκλιση 16. Θεωρούμε ένα μεγάλο δείγμα κυήσεων.

α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το ποσοστό εκείνων που θα διαρκέσουν:

- i. το πολύ 266 ημέρες,
- ii. τουλάχιστον 282 ημέρες,
- iii. περισσότερο από 298 ή λιγότερο από 234 ημέρες.

β) Να γράψετε ένα διάστημα στο οποίο ανήκει η διάρκεια σε ημέρες του 95% των κυήσεων.

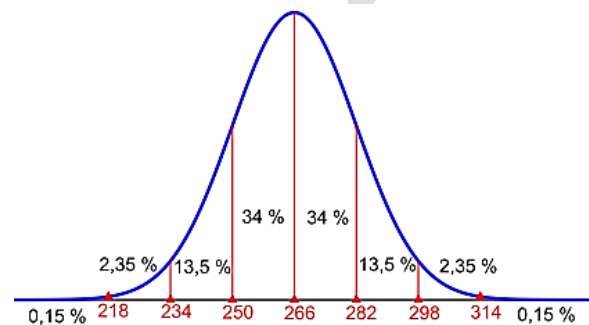
Λύση

Είναι $\bar{x} = 266$, $s = 16$

α) i. Με βάση το διάγραμμα της κανονικής κατανομής το πολύ 266 ημέρες έκανε το 50%

ii. τουλάχιστον 282 ημέρες έκανε το $13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$.

iii. Περισσότερες από 298 έκανε το 2,5% και λιγότερο από 234 ημέρες επίσης το 2,5%, άρα συνολικά το 5%.



β) Από τη θεωρία, το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s) = (234, 298)$.

36749. Η κατανάλωση καυσίμου σε λίτρα, ανά 100 χιλιόμετρα ενός συγκεκριμένου οχήματος, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 8$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0,5$, όπως φαίνεται στο σχήμα (στον οριζόντιο άξονα είναι η κατανάλωση καυσίμου, σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των $\mu + 2\sigma$ και $\mu - 2\sigma$.

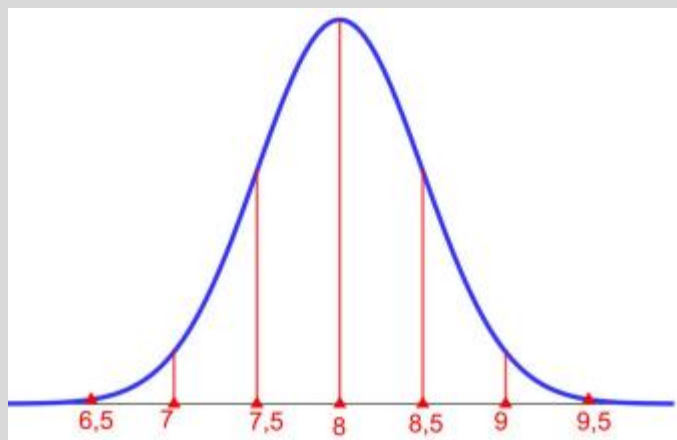
β) Να γράψετε τα διαστήματα $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ και $(\mu, \mu + 2\sigma)$ με αριθμούς.

γ) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 100 χιλιομέτρων του οχήματος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα καθενός από τα παρακάτω ενδεχόμενα για την κατανάλωση του οχήματος σε αυτή τη διαδρομή:

«Η κατανάλωση είναι μεγαλύτερη από 8 λίτρα.»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα (7, 9).»

«Η κατανάλωση ανήκει στο διάστημα (8, 9).»



Λύση

α) $\mu + 2\sigma = 8 + 2 \cdot 0,5 = 9$, $\mu - 2\sigma = 8 - 2 \cdot 0,5 = 7$

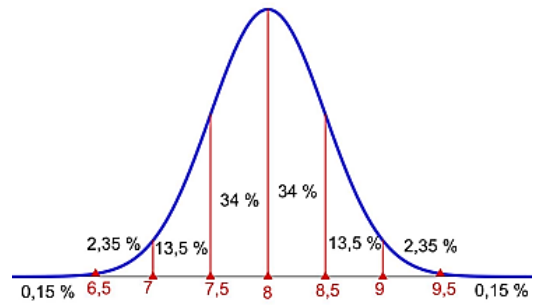
β) (7, 9) και (8,9)

γ) Επειδή στη κανονική κατανομή είναι $\mu = \delta$, η κατανάλωση να είναι μεγαλύτερη από 8 λίτρα

έχει πιθανότητα $50\% = \frac{50}{100} = 0,5$.

Με βάση το διπλανό διάγραμμα, στο διάστημα (7,9), βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.

Με βάση το διπλανό διάγραμμα, στο διάστημα (8,9), βρίσκεται το $34\% + 13,5\% = 47,5\%$ των παρατηρήσεων.



36780. Η Χριστίνα κάθε απόγευμα περπατάει 3 χιλιόμετρα.

Θεωρούμε ότι ο χρόνος, σε min (λεπτά), στον οποίο περπατάει τα 3 χιλιόμετρα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 34$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 1$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$, $\mu - 2\sigma$ και $\mu + 2\sigma$.

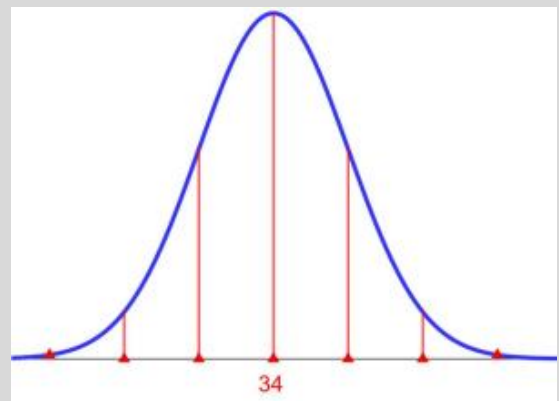
β) Επιλέγουμε τυχαία μια διαδρομή 3 χιλιομέτρων της Χριστίνας.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα, ο χρόνος της για αυτή τη διαδρομή:

i. να ήταν μεγαλύτερος από 34 min,

ii. να ανήκει στο διάστημα (33, 35),

iii. να ανήκει στο διάστημα (32, 36).



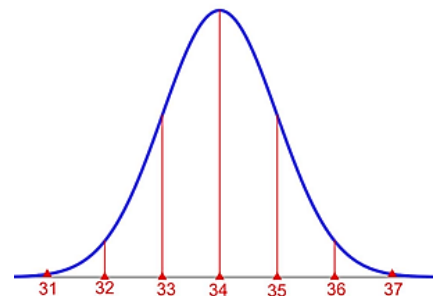
Λύση

α) $\mu - \sigma = 34 - 1 = 33$, $\mu + \sigma = 34 + 1 = 35$, $\mu - 2\sigma = 34 - 2 = 32$, $\mu + 2\sigma = 34 + 2 = 36$.

β) i. Επειδή στη κανονική κατανομή είναι $\mu = \delta$, μεγαλύτερο από 34 είναι το 50% των παρατηρήσεων.

ii. Στο διάστημα (33, 35) = ($\mu - \sigma$, $\mu + \sigma$), από τη θεωρία, βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων.

iii. Στο διάστημα (32, 36) = ($\mu - 2\sigma$, $\mu + 2\sigma$), από τη θεωρία, βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.



4ο Θέμα

27331. Για την εισαγωγή σε μία σχολή, μία γυναίκα ή ένας άνδρας είναι επιλέξιμοι αν το ύψος τους σε cm, είναι τουλάχιστον 170. Η κατανομή του ύψους των γυναικών είναι κανονική με μέση τιμή 163 και τυπική απόκλιση 7 και η κατανομή του ύψους των ανδρών είναι κανονική με μέση τιμή 170. Επιλέγουμε τυχαία μία γυναίκα και έναν άνδρα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i.** η πιθανότητα ώστε μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη, είναι 0,16,
- ii.** η πιθανότητα ώστε ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος, είναι 0,5.

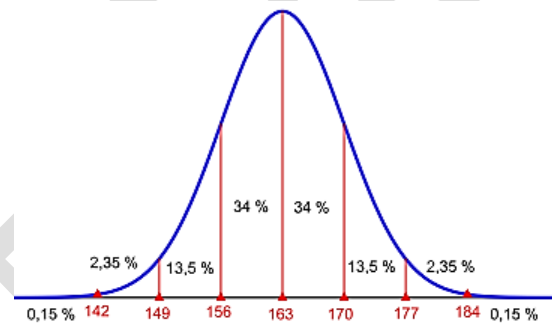
β) Αν για τους άνδρες παραμείνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους στο 170, πόσο θα πρέπει να γίνει η απαίτηση του ελάχιστου ύψους για τις γυναίκες, ώστε για μια γυναίκα να είναι εξίσου πιθανό να είναι επιλέξιμη όσο για έναν άνδρα.

Λύση

α) Είναι $\bar{x}_{\text{Γυναικών}} = 163$, $s_{\text{Γυναικών}} = 7$, $\bar{x}_{\text{Ανδρών}} = 170$.

i. Στο διάγραμμα της κανονικής κατανομής βλέπουμε ότι τουλάχιστον 170cm έχει το 16% των γυναικών, άρα η πιθανότητα μία γυναίκα να είναι επιλέξιμη είναι 0,16.

ii. Επειδή $\bar{x}_{\text{Ανδρών}} = 170$ cm, η πιθανότητα ένας άνδρας να είναι επιλέξιμος είναι 0,5.



β) Θα πρέπει και οι γυναίκες να έχουν μέσο ύψος 170cm, όπως και οι άνδρες.

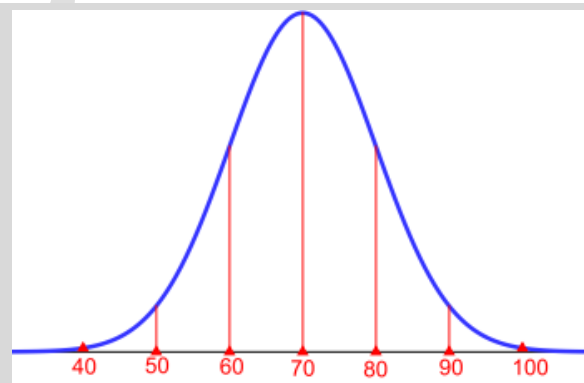
28962. Υποθέτουμε ότι το βάρος, σε κιλά, των μαθητών λυκείου στην Ελλάδα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 70$ (όπως στο σχήμα) και το 99,7% περίπου των μαθητών έχει βάρος που ανήκει στο διάστημα (40,100).

α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της κατανομής.

β) Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή λυκείου από όλο τον πληθυσμό των μαθητών λυκείου, στην Ελλάδα.

i. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα (60, 80)».

ii. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «ο μαθητής έχει βάρος σε κιλά που ανήκει στο διάστημα (80, 90)».



Λύση

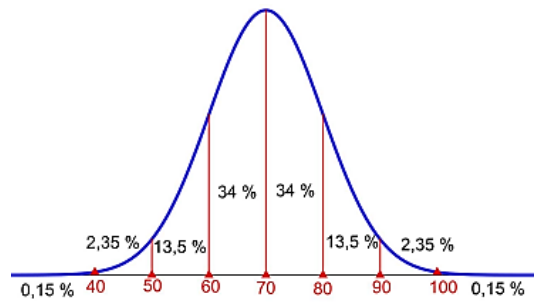
α) Γνωρίζουμε ότι το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα

$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = (70 - 3\sigma, 70 + 3\sigma)$, άρα

$$(70 - 3\sigma, 70 + 3\sigma) = (40, 100) \Leftrightarrow \begin{cases} 70 - 3\sigma = 40 \\ 70 + 3\sigma = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \sigma = 10.$$

β) i. Είναι $(60, 80) = (\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ και από τη θεωρία στο διάστημα αυτό βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{60}{100} = 0,6$.

ii. Με βάση το διάγραμμα της κανονικής κατανομής, στο διάστημα $(80, 90)$ βρίσκεται το 13,5% των παρατηρήσεων, άρα η πιθανότητα είναι $\frac{13,5}{100} = 0,135$.



35536. Η ημερήσια ζήτηση κρέατος, σε κιλά, στην Κεντρική Αγορά Αθηνών (Κ.Α.Α), υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 300$. Γνωρίζουμε ακόμη ότι η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5000 κιλά κρέας είναι 0,5.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι $\mu = 5000$.

β) Αν κάποια μέρα η Κ.Α.Α εφοδιαστεί με 5300 κιλά κρέας τότε ποια είναι η πιθανότητα να πουληθεί όλη αυτή η ποσότητα αυτή τη μέρα;

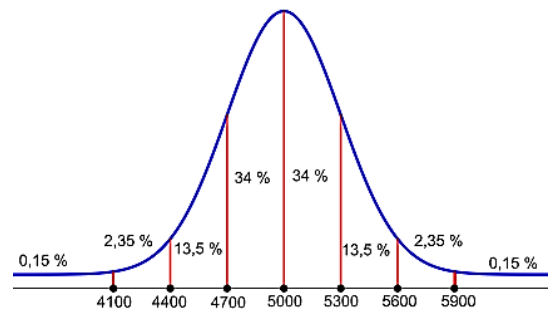
γ) Ποια ποσότητα κρέατος πρέπει να εφοδιαστεί η Κ.Α.Α σε κάποια μέρα έτσι ώστε με πιθανότητα 0,9985 η ποσότητα αυτή να είναι επαρκής για να εξυπηρετήσει την ημερήσια ζήτηση;

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι στην κανονική κατανομή το 50% των τιμών βρίσκονται πριν τη διάμεσο και το 50% μετά. Επειδή η πιθανότητα να ζητηθούν μία τυχαία μέρα έως 5000 κιλά κρέας είναι 0,5, το 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 5000 και προφανώς το άλλο 50% μετά τις 5000, άρα $\delta = 5000$. Στη κανονική κατανομή όμως $\delta = \mu$, άρα $\mu = 5000$.

β) Από το σχήμα της κανονικής κατανομής προκύπτει ότι έως 5300 κιλά βρίσκονται το $0,15\% + 2,35\% + 13,5\% + 68\% = 84\%$ των παρατηρήσεων, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,84.

γ) Είναι $0,9985 = 99,85\% = 100\% - 0,15\%$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι το 99,85 % των τιμών είναι έως 5900 κιλά, επομένως, η πιθανότητα του ενδεχομένου «η ημερήσια ζήτηση κρέατος σε κιλά είναι έως 5900» ισούται κατά προσέγγιση με 0,9985.



36473. Μια εταιρεία επεξεργασίας ρυζιού χρησιμοποιεί ένα αυτόματο μηχάνημα για να συσκευάσει χύμα ρύζι σε σακούλες ετικέτας 1000 γραμμαρίων. Η ποσότητα γέμισης, σε γραμμάρια, που διανέμεται από το μηχάνημα σε κάθε σακούλα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 1010 και τυπική απόκλιση 10.

α) Παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα των παραπάνω συσκευασιών. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των συσκευασιών του δείγματος με βάρος ρυζιού:

i. μικρότερο από 1000 γραμμάρια,

ii. μεταξύ 990 και 1010 γραμμαρίων.

β) Στην εταιρεία θα επιβληθεί πρόστιμο, αν περισσότερο από το 2,5% των συσκευασιών έχει βάρος ρυζιού μικρότερο από 1000 γραμμάρια η καθεμία. Ωστόσο το αυτόματο μηχάνημα έχει τη δυνατότητα να ρυθμίσει τη μέση τιμή της ποσότητας γέμισης που διανέμει στις σακούλες. Ποια νέα μέση τιμή θα πρέπει να επιλέξουν στην εταιρεία (διατηρώντας την τυπική απόκλιση 10) ώστε να μην τους επιβληθεί πρόστιμο;

Λύση

Είναι $\mu = 1010$ και $\sigma = 10$.

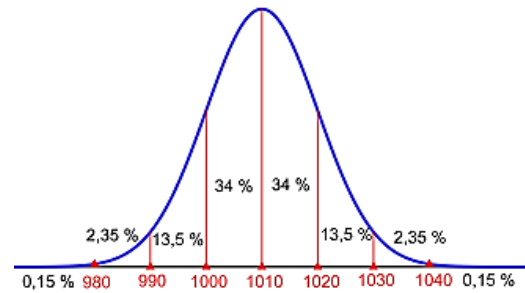
α) Από τη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής, προκύπτει ότι:

i. μικρότερο από 1000 γραμμάρια είναι το $50\% - 34\% = 16\%$ των τιμών.

ii. Μεταξύ 990 και 1010 γραμμαρίων είναι το $13,5\% + 34\% = 47,5\%$ των τιμών.

β) Έστω μ' νέα μέση τιμή.

Το 2,5% των τιμών, από τη θεωρία της κανονικής κατανομής, είναι μικρότερες από το $\mu' - 2\sigma$, άρα $\mu' - 2\sigma = 1000 \Leftrightarrow \mu' - 20 = 1000 \Leftrightarrow \mu' = 1020$



36520. Τα βάρη των αβγών, σε γραμμάρια, που παράγονται σε μία φάρμα, ακολουθούν την κανονική κατανομή. Τα αβγά πωλούνται σε τέσσερα μεγέθη:

- μικρό μέγεθος: με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια
- μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια
- μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια
- πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια

Έχει παρατηρηθεί, ότι μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών.

α) Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή της κατανομής είναι 63 και η τυπική απόκλιση 5.

β) Να βρείτε τα ποσοστά των αβγών που αναμένονται, σε καθένα από τα τέσσερα μεγέθη.

γ) Να συγκρίνετε το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια με το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

Λύση

α) Από τη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής, γνωρίζουμε ότι το 2,5% των τιμών είναι μικρότερες από το $\mu - 2\sigma$ και το 2,5% των τιμών είναι μεγαλύτερες του $\mu + 2\sigma$.

Επειδή μικρού μεγέθους είναι το 2,5% των αβγών και πολύ μεγάλου μεγέθους είναι επίσης το 2,5% των αβγών, είναι

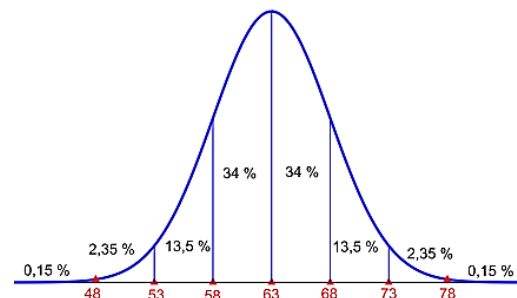
$$\begin{cases} \mu - 2\sigma = 53 \\ \mu + 2\sigma = 73 \end{cases} \Rightarrow 2\mu = 126 \Leftrightarrow \mu = 63 \text{ και } 63 + 2\sigma = 73 \Leftrightarrow 2\sigma = 10 \Leftrightarrow \sigma = 5.$$

β) μικρού μεγέθους με βάρος μικρότερο από 53 γραμμάρια το 2,5%,

μεσαίο μέγεθος: με βάρος από 53 έως 63 γραμμάρια το 47,5%

μεγάλο μέγεθος: με βάρος από 63 έως 73 γραμμάρια το 47,5%

πολύ μεγάλο μέγεθος: με βάρος μεγαλύτερο από 73 γραμμάρια 2,5%.



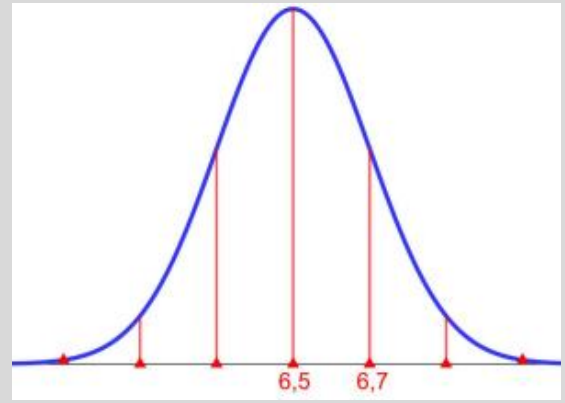
γ) Το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 70 είναι μικρότερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος κάτω από 73, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$.

Το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 50, είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών με βάρος πάνω από 53, το οποίο είναι $100\% - 2,5\% = 97,5\%$.

Άρα το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μεγαλύτερο από 50 γραμμάρια είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των αβγών που έχουν βάρος μικρότερο από 70 γραμμάρια.

36781. Ο Κώστας βαδίζει με γρήγορο ρυθμό και η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα ανά ώρα, ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 6,5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Η πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητά του να είναι μεταξύ 6,5 και 6,7 χιλιομέτρων την ώρα είναι 0,34 περίπου.



α) Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα, σε μια τυχαία διαδρομή η ταχύτητα του Κώστα να είναι:

i. μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα,

ii. μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα.

γ) Ο Κώστας άλλαξε τον τρόπο περπατήματός του. Η ταχύτητά του, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί και πάλι την κανονική κατανομή, αλλά με $\mu = 6,3$ και σ διαφορετική από την προηγούμενη.

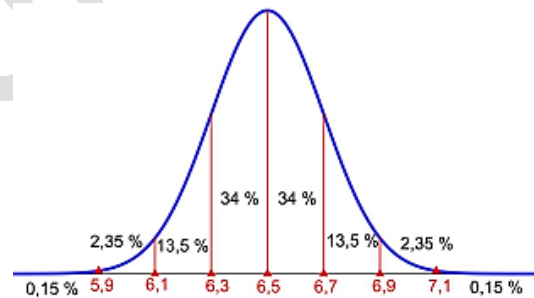
Η πιθανότητα η ταχύτητά του, σε μια τυχαία διαδρομή, να είναι μεταξύ 6,3 και 6,6 χιλιομέτρων την ώρα είναι ίση με 0,34 περίπου. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η ταχύτητά του να είναι μικρότερη από 6 χιλιόμετρα την ώρα.)

Λύση

α) Στη κανονική κατανομή στο διάστημα $(\mu, \mu + \sigma) = (6,5, 6,7)$ βρίσκεται το 34% των παρατηρήσεων, δηλαδή η πιθανότητα είναι 0,34, άρα $\mu + \sigma = 6,7 \Leftrightarrow \sigma = 6,7 - 6,5 = 2$.

β) i. Η πιθανότητα η ταχύτητα του Κώστα να είναι μικρότερη από 6,5 χιλιόμετρα την ώρα είναι ίση με 0,5, γιατί η $\mu = 6,5$ και στη κανονική κατανομή είναι $\mu = \delta$.

ii. Από το σχήμα προκύπτει ότι το $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ των στοιχείων έχουν τιμή μικρότερη από 6,1. Επειδή η διαδρομή είναι τυχαία, η πιθανότητα η ταχύτητα του Κώστα σε αυτή τη διαδρομή να είναι μικρότερη από 6,1 χιλιόμετρα την ώρα είναι ίση με 0,025 περίπου.



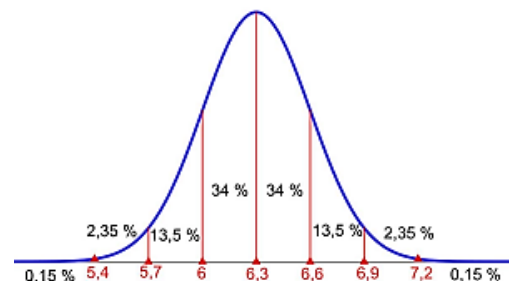
γ) Επειδή η ταχύτητα του Κώστα, σε χιλιόμετρα την ώρα ακολουθεί κανονική κατανομή με $\mu = 6,3$ και τυπική απόκλιση σ , η πιθανότητα η ταχύτητά του σε μια τυχαία διαδρομή να βρίσκεται στο διάστημα $(6,3, 6,3 + \sigma)$ είναι ίση με 0,34 περίπου. Άρα είναι ίση με την πιθανότητα η ταχύτητά του να βρίσκεται στο διάστημα $(6,3, 6,6)$.

Επομένως $6,3 + \sigma = 6,6$ ή $\sigma = 0,3$.

Σε αυτή τη κανονική κατανομή είναι

$6,3 - 0,3 = 6 \Leftrightarrow \mu - \sigma = 6$.

Στη γραφική παράσταση της κανονικής κατανομής βλέπουμε ότι μικρότερες από 6 είναι το $13,5\% + 2,35\% + 0,15\% = 16\%$ των παρατηρήσεων, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,16.



36782. Υποθέτουμε ότι η τιμή, σε ευρώ ανά λίτρο, του ελαιόλαδου στις επιχειρήσεις μιας ευρωπαϊκής χώρας Α ακολουθεί περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 5$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου σε τυχαία επιχείρηση της χώρας Α να είναι στο διάστημα $(5, 5,6)$ είναι 0,475 περίπου.

α) Με T συμβολίζουμε την τιμή του ελαιόλαδου, μιας τυχαίας επιχείρησης στην χώρα Α, σε ευρώ ανά λίτρο.

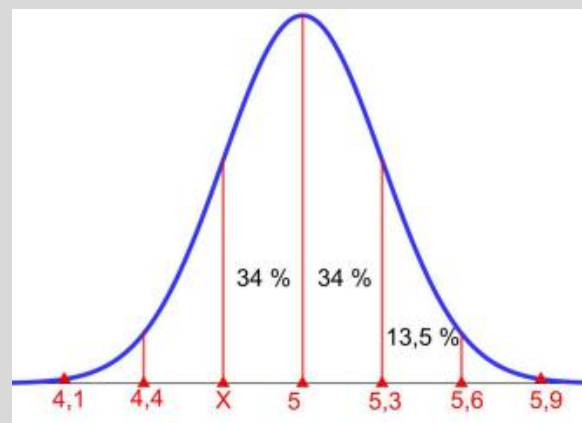
Να υπολογίσετε προσεγγιστικά:

i. την πιθανότητα το T να είναι μεγαλύτερο του 5.

ii. την πιθανότητα να ισχύει $T > 5,6$.

iii. την τυπική απόκλιση σ της παραπάνω κανονικής κατανομής.

β) Δίνεται ότι η πιθανότητα η τιμή του ελαιόλαδου, στην τυχαία επιχείρηση της χώρας Α, να ανήκει στο διάστημα $(X, 5)$ είναι 0,34. Να υπολογίσετε προσεγγιστικά την τιμή του X .



Λύση

α) i. Επειδή $\mu = 5$ είναι και $\delta = 5$, άρα μεγαλύτερο του 5 είναι το 50% των παρατηρήσεων, οπότε η πιθανότητα είναι 0,5.

ii. Μετά το 5,6 στο σχήμα βλέπουμε ότι βρίσκεται το $2,35\% + 0,15\% = 2,5\%$ των παρατηρήσεων, οπότε η πιθανότητα να ισχύει $T > 5,6$ είναι $\frac{2,5}{100} = 0,025$.

iii. Είναι $\mu + \sigma = 5,3 \Leftrightarrow 5 + \sigma = 5,3 \Leftrightarrow \sigma = 0,3$.

β) Το 34% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\mu - \sigma, \mu) = (4,7, 5)$, άρα $X = 4,7$.

Γραμμική Συσχέτιση – Παλινδρόμηση

4ο Θέμα

28796. Δίνεται το διπλανό διάγραμμα διασποράς δύο ποσοτικών μεταβλητών X και Y . Η μεταβλητή X παριστάνει το βάθος μέσα στην άμμο σε εκατοστά στο οποίο αλιεύθηκε ένα μύδι, και η μεταβλητή Y παριστάνει το βάρος σε γραμμάρια του μυδιού.

α) Με βάση το παραπάνω διάγραμμα να επιλέξετε ποιος μπορεί να είναι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των μεταβλητών X και Y από αυτούς που δίνονται παρακάτω.

i. $r_1 = -1$, **ii.** $r_2 = -0,7$

iii. $r_3 = 0,9$, **iv.** $r_4 = 1$.

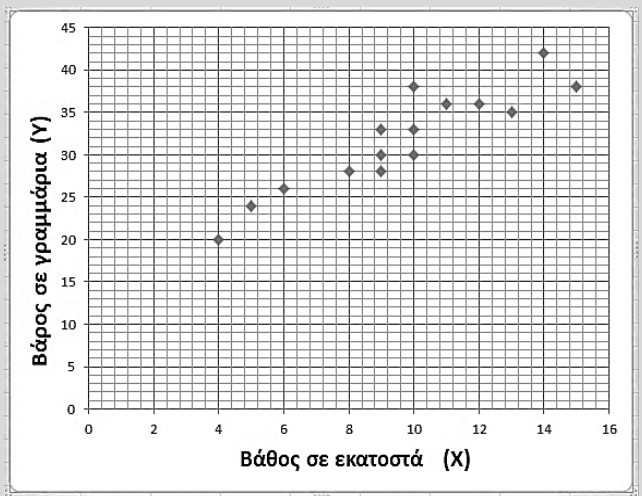
Να δικαιολογήσετε λεκτικά την απάντησή σας.

β) Ένας μαθητής σχεδίασε την διπλανή ευθεία προσαρμοσμένη στα δεδομένα «με το μάτι».

Με βάση αυτή την ευθεία να εκτιμήσετε:

i. Ποιο είναι το αναμενόμενο βάρος του μυδιού σε βάθος 6 εκατοστά;

ii. Σε τι βάθος προσδοκούμε να βρούμε ένα μύδι με αναμενόμενο βάρος 36 γραμμάρια;

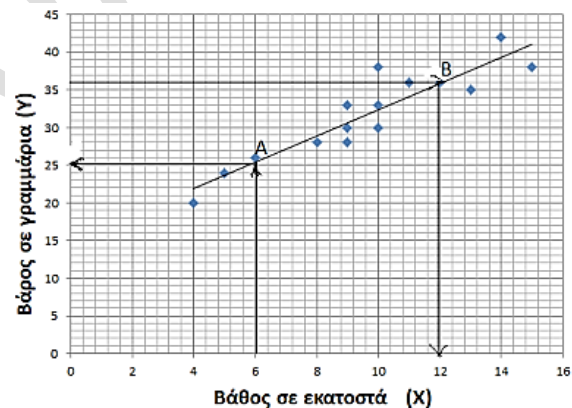


Λύση

α) Επειδή οι μεταβλητές X και Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες, σωστή είναι μια από τις **iii.**, **iv.** Επειδή οι παρατηρήσεις είναι συγκεντρωμένες γύρω από την νοητή ευθεία, αλλά όχι πάνω σε αυτήν, η σωστή απάντηση είναι $r_3 = 0,9$.

β) i. Το αναμενόμενο βάρος σε βάθος 6cm είναι 25gr.

ii. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι βάρος 36gr έχει ένα μύδι που βρίσκεται σε βάθος 12cm.



32880. Στον παρακάτω πίνακα η μεταβλητή Y , παριστάνει την πρωινή συστολική αρτηριακή πίεση (σε mmHg) ενός ατόμου και η μεταβλητή X , παριστάνει την αντίστοιχη εσωτερική θερμοκρασία του περιβάλλοντος (σε $^{\circ}\text{C}$).

Θερμοκρασία X	5	8	10	12	15	16	17	20	22	23
Συστολική Πίεση Y	127	135	125	130	118	132	125	131	132	123

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς των μεταβλητών X και Y .

β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

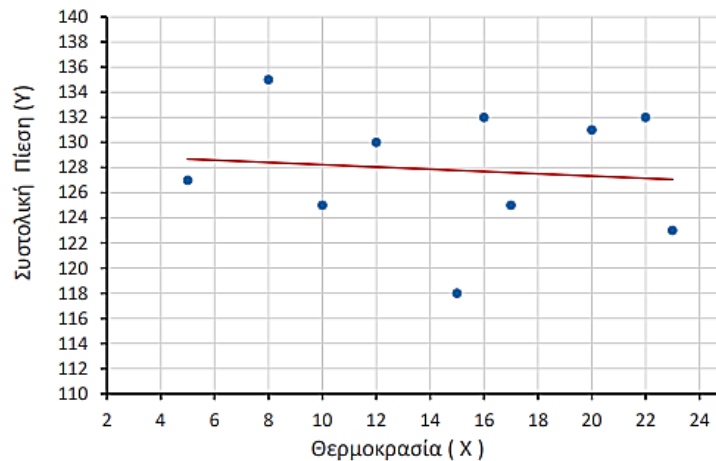
γ) Δίνεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X και Y είναι $r = -0,1$.

i. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των X και Y .

ii. Να ερμηνεύσετε τη συσχέτιση της συστολικής αρτηριακής πίεσης με την αντίστοιχη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Λύση

α)



β) Φαίνεται στο σχήμα.

γ) i. Επειδή $r = -0,1 < 0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει αρνητική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y.

ii. Αν η θερμοκρασία του περιβάλλοντος αυξάνεται, τότε αναμένεται να μειώνεται η συστολική αρτηριακή πίεση.

32885. Ένας γεωπόνος, κατά την καλλιέργεια ενός είδους ντομάτας σε ένα συγκεκριμένο τύπο εδάφους, χρησιμοποίησε διαφορετικές ποσότητες ενός λιπάσματος (σε γραμμάρια ανά φυτό). Κατά τη συγκομιδή κατέγραψε τα αντίστοιχα βάρη των καρπών της ντομάτας (σε γραμμάρια) τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

λίπασμα (γρ.)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
ντομάτα (γρ.)	110	150	150	160	180	230	230	245	245	250

α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς μεταξύ της ποσότητας λιπάσματος ανά φυτό και του βάρους της ντομάτας.

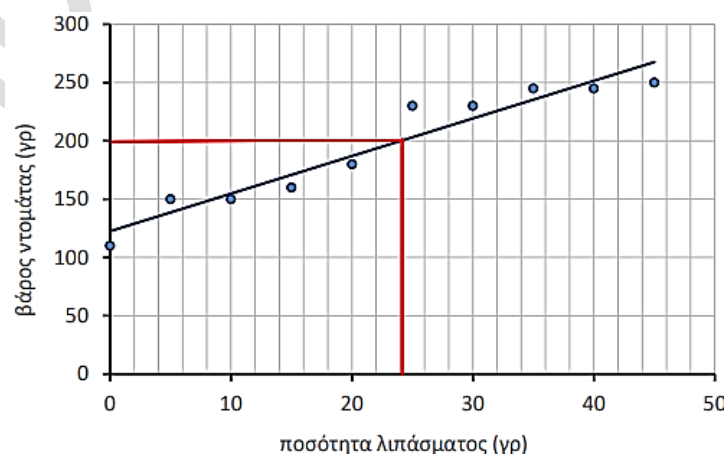
β) Να σχεδιάσετε την ευθεία που νομίζετε ότι προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα.

γ) Να εκτιμήσετε την ποσότητα λιπάσματος ανά φυτό που απαιτείται, για την παραγωγή ντομάτας με αναμενόμενο βάρος 200 γραμμάρια.

δ) Εξηγήστε γιατί η ευθεία του ερωτήματος (β) δεν πρέπει να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του αναμενόμενου βάρους ντομάτας, στην οποία θα χρησιμοποιηθεί 70 γραμμάρια λίπασμα.

Λύση

α)

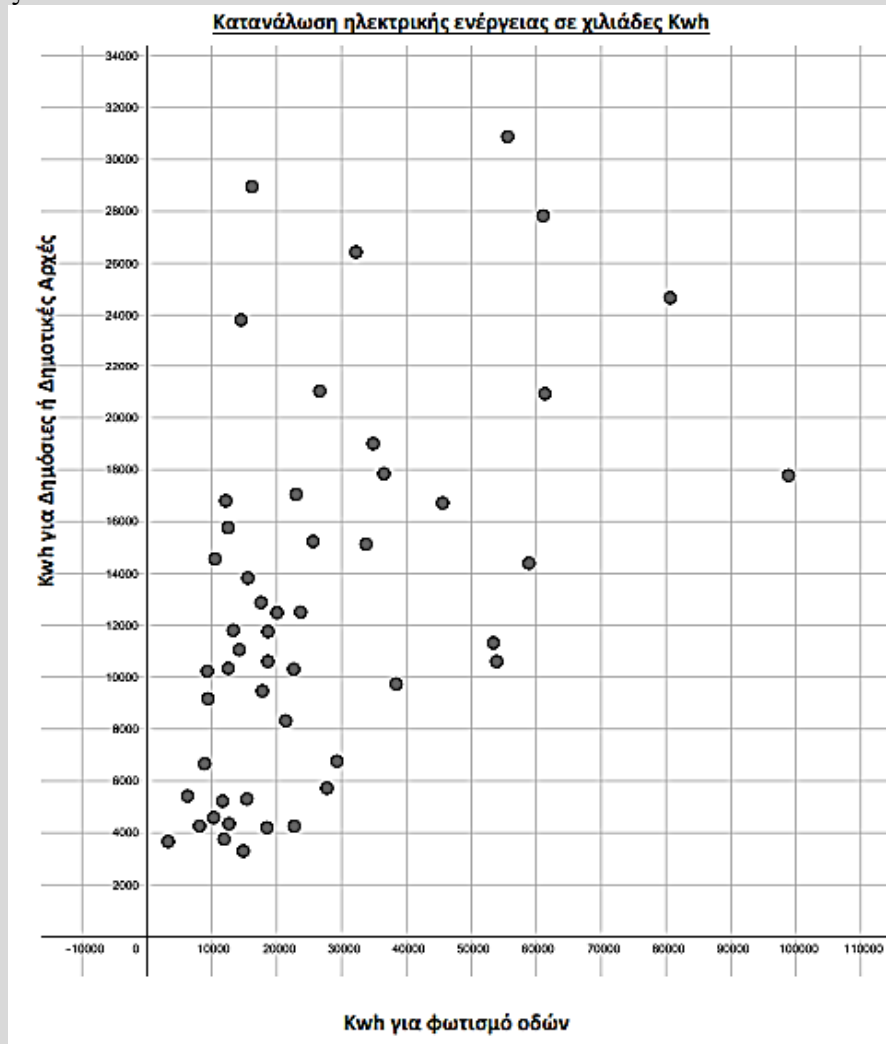


β) Φαίνεται στο σχήμα.

γ) Το σημείο με τεταγμένη 200 είναι το (25, 200), άρα για την παραγωγή ντομάτας με αναμενόμενο βάρος 200 γραμμάρια η ποσότητα λιπάσματος που απαιτείται, είναι 24 γραμμάρια.

δ) Η τιμή 70 της μεταβλητής ποσότητα λιπάσματος δεν οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα αφού βρίσκεται έξω από το πεδίο των δεδομένων που έχουμε στη διάθεσή μας, που είναι από 0 έως 45. Άρα δεν μπορούμε να εκτιμήσουμε το αναμενόμενο βάρος ντομάτας στην οποία θα χρησιμοποιηθεί 70 γραμμάρια λίπασμα.

35592. Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς παρουσιάζεται η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας X για το φωτισμό των οδών στους 50 νομούς της Ελλάδας (εκτός του νομού Αττικής και Θεσσαλονίκης), σε σχέση με την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας Y για τις Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές.



α) Να ομαδοποιήσετε την κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας Y που απαιτείται για τη χρήση σε Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές σε κλάσεις πλάτους 4000, ξεκινώντας από την κλάση $[2000, 6000)$ και να φτιάξετε τον πίνακα συχνοτήτων f_i και σχετικών συχνοτήτων $f_i \%$.

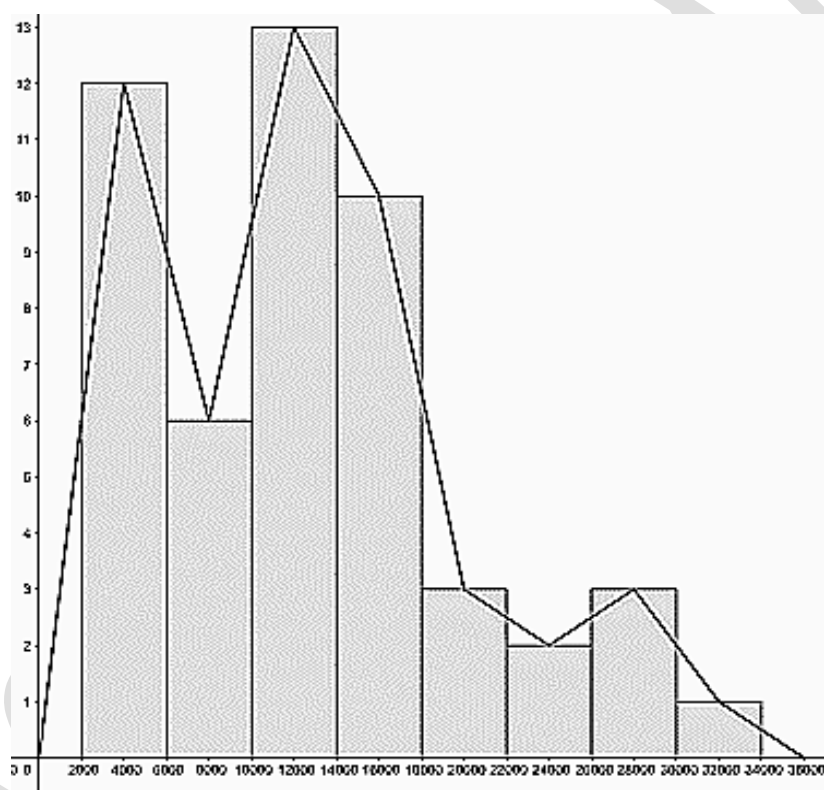
β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων για την μεταβλητή Y .

Λύση

α) Οι κλάσεις είναι $[2000, 6000)$, $[6000, 10.000)$, $[10.000, 14.000)$, $[14.000, 18.000)$, $[18.000, 22.000)$, $[22.000, 26.000)$, $[26.000, 30.000)$ και $[30.000, 34.000)$. Κάνουμε την απαραίτητη διαλογή καταμετρώντας τις τελίτσες με βάση την τετμημένη τους και καταγράφοντάς τις στις αντίστοιχες κλάσεις.

Κωή για Δημόσιες ή Δημοτικές Αρχές	Συχνότητα n_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα % $f_i\%$
[2000, 6000)	12	0,24	24
[6000, 10000)	6	0,12	12
[10000, 14000)	13	0,26	26
[14000, 18000)	10	0,20	20
[18000, 22000)	3	0,06	6
[22000, 26000)	2	0,04	4
[26000, 30000)	3	0,06	6
[30000, 34000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

β) Το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων:



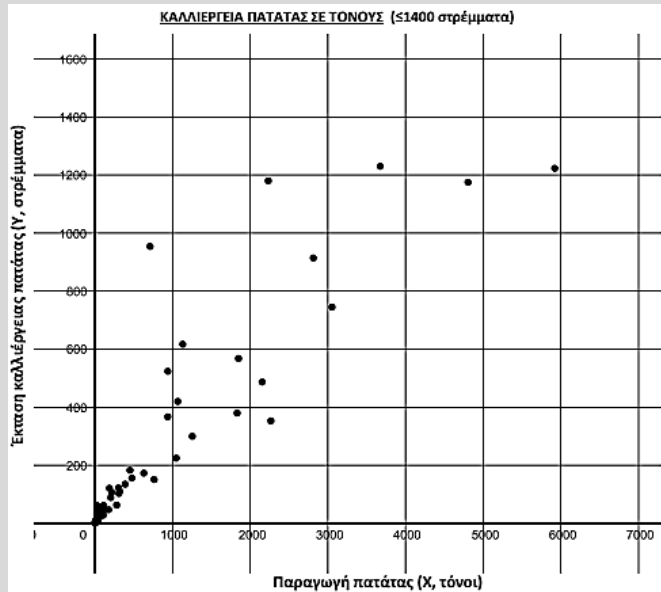
35593. Στο παρακάτω διάγραμμα διασποράς φαίνεται η παραγωγή πατάτας (X) σε σχέση με την έκταση (Y) στην οποία παράγεται, για 50 περιοχές της Ελλάδας από ολόκληρη την επικράτεια, των οποίων η έκταση δεν ξεπερνάει τα 1400 στρέμματα.

Η παραγωγή της πατάτας (μεταβλητή X) είναι μετρημένη σε τόνους και η έκταση (μεταβλητή Y) είναι μετρημένη σε στρέμματα.

α) Η παραγωγή της πατάτας σε τόνους, ομαδοποιήθηκε στις κλάσεις [0,1000), [1000,2000), [2000,3000), [3000,4000), [4000,5000), [5000,6000).

Να αντιγράψετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων και σχετικών

συχνοτήτων και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω διάγραμμα.



Κλάσεις με παραγωγή σε τόνους	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
[0,1000)			
[1000,2000)			
[2000,3000)			
[3000,4000)			
[4000,5000)			
[5000,6000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

β) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων για την μεταβλητή X.

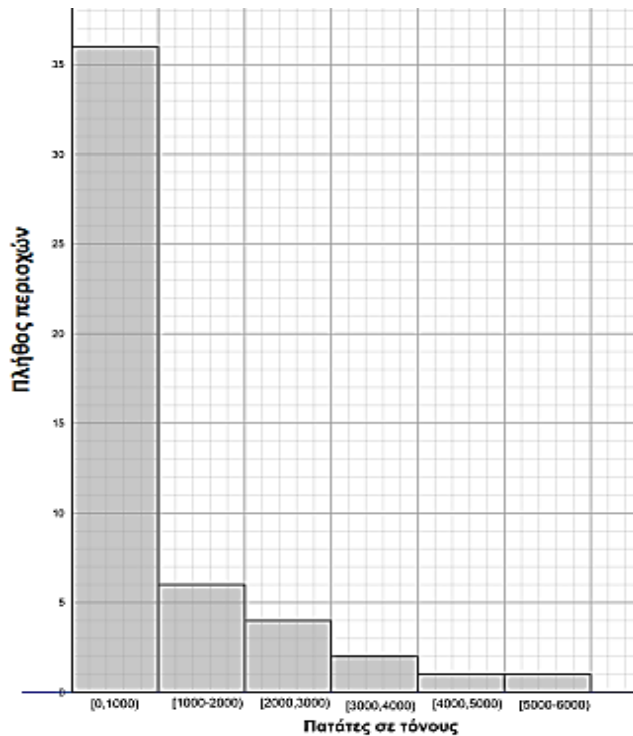
γ) Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών (X) και (Y), όπου (X) είναι η παραγωγή πατάτας σε τόνους και (Y) είναι η έκταση σε στρέμματα στην οποία παράγονται οι πατάτες, θα είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Λύση

α)

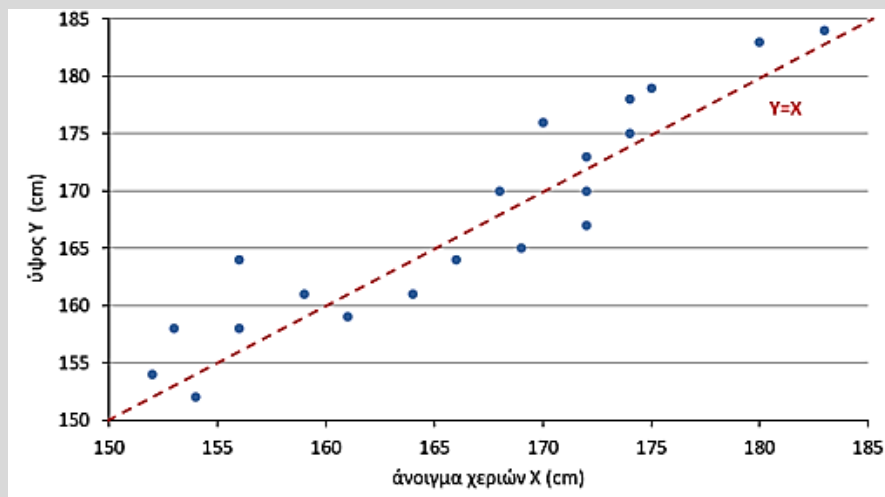
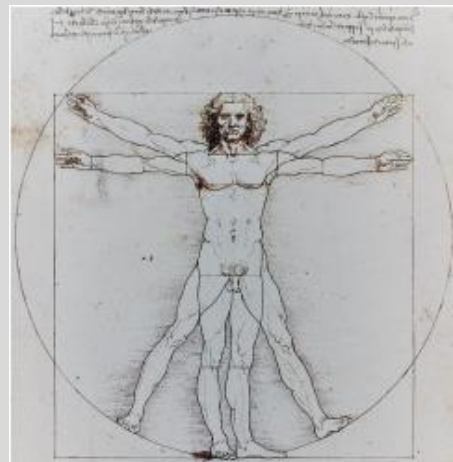
Κλάσεις με παραγωγή σε τόνους	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα $f_i \%$
[0,1000)	36	0,72	72
[1000,2000)	6	0,12	12
[2000,3000)	4	0,08	8
[3000,4000)	2	0,04	4
[4000,5000)	1	0,02	2
[5000,6000)	1	0,02	2
Σύνολο	50	1	100

β) Το ιστόγραμμα συχνοτήτων :



γ) Επειδή όταν οι τιμές της μεταβλητής X αυξάνονται, τότε οι τιμές της Y τείνουν να αυξάνονται ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός.

36926. Ο Λεονάρντο ντα Βίντσι, στο σχέδιο του «Ο Άνθρωπος του Βιτρούβιου», ισχυρίζεται ότι το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου και το ύψος του είναι περίπου ίσα. Θέλοντας να το διερευνήσει αυτό, μια ομάδα μαθητών ενός Λυκείου επέλεξε τυχαία ένα δείγμα 20 συμμαθητών τους και μέτρησε, σε cm, το άνοιγμα των χεριών και το ύψος τους. Με τα δεδομένα αυτά η ομάδα των μαθητών κατασκεύασε το παρακάτω διάγραμμα διασποράς και την ευθεία $Y = X$ στο ίδιο σχήμα, όπως φαίνεται παρακάτω:



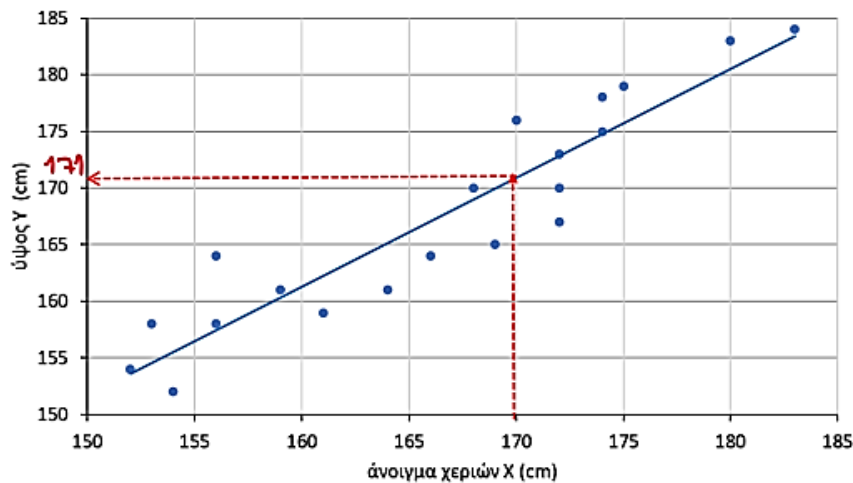
- α) Στην έρευνα των μαθητών ποιες είναι οι μεταβλητές και ποιο το είδος τους;
- β) Οι μαθητές υπολόγισαν ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των παραπάνω μεταβλητών είναι $r = 0,93$. Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Λεονάρντο ντα Βίντσι;
- γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία που προσαρμόζεται «με το μάτι» στα δεδομένα.
- δ) Ένας από τους μαθητές του Λυκείου που δεν συμμετείχε στην έρευνα, έχει άνοιγμα χεριών 170 cm. Να εκτιμήσετε ποιο θα είναι περίπου το ύψος του.

Λύση

α) Οι μεταβλητές είναι το άνοιγμα των χεριών και συμβολίζεται με X και το ύψος του μαθητή που συμβολίζεται με Y .

β) Επειδή $r = 0,93$ οι X και Y είναι θετικά, γραμμικά συσχετισμένες μεταβλητές.

γ)



δ) Το σημείο της ευθείας με τετμημένη 170 είναι το (170, 171), επομένως ο μαθητής με άνοιγμα χεριών 170cm θα έχει ύψος περίπου 171 cm.